АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

# РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

## МАТЕМАТИКА

### РЕФЕРАТЫ

### 5013—5367

*

№ 10 1954

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

*В. В. Алпатов, А. П. Лебедев, С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, Д. Ю. Панов (председатель редколлегии), Б. Н. Рутовский, Л. И. Седов, Э. В. Шпольский*

## СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы . . . . . 1
История математики. Биографии . . . . . 1
Основания математики и математическая логика . . . . . 2
Теория чисел . . . . . 5
Алгебра . . . . . 10
Многочлены и линейная алгебра . . . . 10
Группы . . . . . 12
Поля, кольца и структуры . . . . . 13
Топология . . . . . 13
Теория функций действительного переменного 20
Теория множеств . . . . . —
Приближение функций полиномами и их обобщениями . . . . . 22
Теория функций комплексного переменного 22
Дифференциальные уравнения . . . . . 27
Обыкновенные дифференциальные уравнения . . . . . 27
Уравнения в частных производных . . . 29
Приложения к физике, технике и естественным наукам . . . . . 30
Интегральные уравнения . . . . . 33
Приложения интегральных уравнений . — 
Вариационное исчисление . . . . . 35
Анализ (другие вопросы) . . . . . 37
Числовые ряды . . . . . 38
Специальные функции . . . . . 40
Интегральные преобразования и операционное исчисление . . . . . 42
Приложения общих методов математического анализа . . . . . 43
Функциональный анализ . . . . . 45
Теория вероятностей . . . . . 48
Математическая статистика . . . . . 49
Теория игр . . . . . —
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов в технике . . . 52
Геометрия . . . . . 53
Приложения геометрии . . . . . 55
Проективная и начертательная геометрия 55
Алгебраическая геометрия . . . . . 57
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства . . . . . 57
Геометрия $n$-мерного пространства. Теория относительности . . . . . 59
Метрические методы в геометрии . . . . 62
Геометрия выпуклых многообразий . . 64
Численные и графические методы . . . . . 64
Таблицы . . . . . 70
Алгебра электрических цепей . . . . . 70
Вычислительные машины и математические приборы . . . . . 72
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике . . . . . 87
Авторский указатель . . . . . I—IV

Адрес редакции: Москва, Д-219, Балтийский пос., д. 42 Б.

# РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
# МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, В. М. Курочкин, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников, С. В. Фомин*

**Рефераты 5013—5367** **№ 10** **Октябрь 1954 г.**


## ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

**5013. О профессии математика. Колмогоров** (O zawodzie matematyka. Kołmogorow Andrzej), Matematyka, 1953, 6, № 6, 10—19 (польск.)

**5014. Новая литература по элементарной математике с точки зрения высшей** (Neue Literatur zur Elementarmathematik vom höheren Standpunkt), Math.-Phys. Semesterber., 1953, 3, № 1—2, 134—135 (нем.)

Кратко описываются две новые книги: Bieberbach L., Theorie der geometrischen Konstruktionen (Verlag Birkhäuser, Basel, 1952); Lietzmann W., Anschauliche Einführung in die mehrdimensionale Geometrie (Verlag von R. Oldenbourg, München, 1952).

**5015 К. Энциклопедия математических знаний и их применений** (Enzyklop die der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, Bd. I, T. I, H. 3, 72 S., Teubner, Leipzig, 1953, 7.50 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, № 7, 312 (Библ.)

**5016 РЖМ. Рефераты диссертаций математико-естественного факультета Вестфальского университета в Мюнстере. Выпуски 1, 2, 3** (Dissertationen der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster in Referaten. Heft 1, 28 S., Heft 2, 32 S., Heft 3, 48 S., Aschendorff, Münster, 1952/53) [**Рецензия: Прахар** (Prachar K.), Internat. math. Nachr., 1953, 8, № 29/30, 40 (нем.)]

## ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

**5017. Краткая история математики. Зарубежная математика** (數學小史外篇之部), Из книги «Математический словарь» (數學辭典), под ред. Чжао Ляо 趙遼, гл. 9, 773—805, Шанхай Гоминь, Шуцзуй фуи шушэ (上海, 國民書局復益書社), 1953, 100 тыс. юаней (кит.)

Глава из китайского «Математического словаря», представляющая собой весьма сжатый обзор основных открытий в математике от VII в. до н. э. до конца XIX в. Отдельные части главы посвящены математике в древней Греции, в Средние века, в эпоху Возрождения и в XVII, XVIII и XIX вв.; история математики в Китае и Японии не затрагивается. Обзор содержит много сведений о жизни и достижениях отдельных крупных ученых. Изложение, вообще, приурочивается всякий раз к тем или иным лицам, хотя иногда содержит краткие общие характеристики научных направлений.

Работа является компилятивной и, судя по всему, при ее составлении были использованы устарелые и необъективные источники. Так, о работах Валлиса или Маклорена сказано гораздо подробнее, чем о неизмеримо более значительных открытиях Эйлера. Среди ученых, разрабатывавших в XIX в. математическую физику, вовсе не упомянуты Фурье, Коши, Пуассон и Остроградский. Основоположной деятельности Чебышева в теории чисел уделено буквально пять слов, а наиболее крупным ученым, работавшим во второй половине XIX в. в теории чисел, назван Г. Смит, о котором рассказано довольно подробно. Фамилии Куммера, Золотарева, Дедекинда, Маркова вовсе не названы. Неполноценны сведения о Римане, о Вейерштрассе.

В реферируемом обзоре нет сведений об открытии и развитии неевклидовой геометрии, не упоминаются Лобачевский, Бойаи и др. Про высшую алгебру сказано, что наиболее успешно ее развивали в XIX в. Коши, Гамильтон и Кэли, и полностью отсутствует упоминание о разработке теории групп и о Галуа. Нет сведений о развитии теории функций действительного переменного, о теории множеств и о Г. Канторе. Чебышев назван только в связи с теорией чисел. О развитии в XIX в. теории вероятностей сказано несколько слов только в параграфе о Лапласе.

С точки зрения современного состояния наших знаний недостоверен ряд сведений о математике древних греков (например, характеристика открытий Пифагора; роль и открытия Платона) и недостаточны сведения о трудах средневековых ученых, писавших на арабском языке; эти ученые, между прочим, неправильно объединены в рассматриваемом об-

зоре под общим названием «арабов» (в том числе хорезмиец ал-Хорезми и таджик ал-Хайям).
*А. П. Юшкевич*

5018. **К истолкованию вавилонской математики; треугольники с правильными сторонами. Брёйнс** (A contribution to the interpretation of Babylonian mathematics; triangles with regular sides. Bruins E. M.), Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wetensch., 1953, **A56**, № 5, 412—422; Indagationes math., 1953, **15**, № 5, 412—422 (англ.)

Под правильными сторонами автор подразумевает стороны, длины которых выражаются правильными числами, т. е. числами, имеющими вид $2^{\alpha}\cdot 3^{\beta}\cdot 5^{\gamma}$ (2, 3 и 5 простые множители, на которые разлагается число 60 — основание вавилонской системы счисления). Автор указывает, что в вавилонской геометрии имелось понятие наклона прямой линии, который выражался отношением вертикального катета соответствующего прямоугольного треугольника к горизонтальному. Так как выполнение деления в вавилонской математике сводилось к умножению на «обратное» число, выражавшееся конечной шестидесятиричной дробью только в случае делителя — правильного числа, то естественно встал вопрос о треугольниках с правильными сторонами. Поскольку, далее, понятие угла было неизвестно вавилонской математике, то для треугольников существенное значение имела площадь, которая для возможности вычисления должна была выражаться рациональным числом.

Автор доказывает, что если ограничиться треугольниками, у которых стороны не выражаются числами, имеющими общие множители, то:

1. Существуют единственный прямоугольный треугольник с правильными сторонами и рациональной площадью типа (3, 4, 5).

2. Существуют только три типа равнобедренных треугольников, удовлетворяющих вышепоставленному условию: (5, 5, 6), (5, 5, 8), (25, 25, 48).

3. Не существует разносторонних косоугольных треугольников с правильными сторонами и рациональной площадью. *И. Н. Веселовский*

5019. **Начала теории эллиптических функций (К столетию со дня смерти 18 февраля 1851 г. Карла-Густава Якоби). Натуччи** (Le origini della teoria delle funzioni ellittiche (nel I centenariodella morte di Carlo Gustavo Jacobi 18 febbraio 1851). Natucci A.), Atti Accad. Ligure, 1952, 9, 40—54 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 11, 1049.

5020. **Жизнь и творчество Михая Бауэра. Рédеи** (Bauer Mihály élete és munkássága. Rédei László), Mat. lapok, 1953, **4**, № 4, 241—262 (венг.)

Краткий очерк жизни и научной деятельности венгерского математика М. Бауэра (1874—1945) с приложением списка его работ и их характеристиками.

5021. **О теореме Вильсона. Фюрнé** (Um den Satz von Wilson. Furnée René), Elem. Math., 1953, 8, № 6, 138—139 (нем.)

Автор, обсуждая высказанное Мантелем (Mantel W., Getallenleer, гл. 7, § 3) сомнение в том, что действительно существовал математик Вильсон, имя которого носит известная теорема теории чисел, приходит к выводу, что для такого сомнения нет оснований. *И. Г. Мельников*

5022. **Александр Сергеевич Кованько (К шестидесятилетию со дня рождения). Костовский А. Н.,** Успехи матем. наук, 1954, 9, № 2(60), 215—221

Краткий очерк научной деятельности и список печатных работ А. С. Кованько.

5023. **Керим Эрим (Некролог)** (Obituary: Kerim Erim), Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul (A), 1953, **18**, № 1—4 (турец.; франц.)

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 832.

5024. **О жизни и деятельности проф. Матиаша Лерха. Франк** (O životě profesora Matyáše Lercha. Frank Ludvík), Časop. pěstov. mat., 1953, **78**, № 2, 119—137 (чеш.)

Очерк жизни и научной деятельности проф. М. Лерха (к 30-летию со дня смерти).

5025. **Список трудов проф. Матиаша Лерха. Шкрашек** (Seznam prací prof. Matyáše Lercha. Škrášek Josef), Časop. pěstov. mat., 1953, 78, № 2, 139—148 (чеш.)

5026 **РЕЦ. Михаил Васильевич Остроградский. Гнеденко Б. В.,** 331 стр., Гостехиздат, М., 1952, 8 р. 40 к. [**Рецензия: Юшкевич А. П.,** Успехи матем. наук, 1954, 9, № 1, 155—158]

---

**См. также:** 5063, 5211, 5223, 5235

## ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

5027. **Парадокс класса всех фундированных классов. Ютинг** (Paradox of the class of all grounded classes. Yuting Shen), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 2, 114 (англ.)

Класс $A$ называется фундированным (нефундированным), если нет (есть) такой последовательности классов $A_n$, что $\ldots \in A_2 \in A_1 \in A$.

Парадокс: как допущение фундированности класса всех фундированных классов, так и допущение его нефундированности приводят к противоречию.

Этот парадокс аналогичен парадоксу всех классов $A$ без круга (т. е. таких, что $A \in A_s \in \ldots \in A_2 \in A_1 = A$ при некотором $s$) и парадоксу всех классов без $n$-членного круга ($s = n$), являющемуся известным обобщением парадокса множества всех нормальных множеств ($A \notin A$). *А. В. Кузнецов*

**5028. Заметка о парадоксах. Стэнли** (Note on a paradox. Stanley Robert L.), J. Symbolic Logic, 1953, 18, № 3, 233 (англ.)

Показывается, что если, пользуясь неограниченной свободой образования множеств, определить множество $K$ как $\hat{x}\,(\overline{x \in x})$ (черта наверху означает дополнение до универсального множества), то доказуемы эквивалентности $K \in K \equiv \sim K \in K$ и $\overline{K} \in \overline{K} \equiv \sim \overline{K} \in \overline{K}$. Аналогичное утверждение доказывается для множества $M$, определенного как $\hat{x}\,(\overline{x \in x \cdot \supset \cdot 2+2=5})$. *А. С. Есенин-Вольпин*

**5029. Фрагменты $m$-значного исчисления предложений. Роз** (Fragments of the m-valued propositional calculus. Rose Alan), Math. Z., 1953, 59, № 2, 206—210 (англ.)

Хенкин (Henkin L., J. Symbolic Logic, 1949, 14, 42—48) развил метод формализации двузначного исчисления предложений в предположении, что материальная импликация может быть определена в примитивных функциях. В реферируемой статье дается расширение этого метода на $m$-значное исчисление предложений с одним выделенным значением. Предполагается, что импликационная функция Поста и Лукасевича должна быть определима через примитивные функции.

Обозначим через 1, 2, 3, . . . , $m$ матричные значения, выделенное значение—через 1. Если $x$ и $y$ суть значения $X$ и $Y$ соответственно, то значение $f(x, y)$ функции $X \to Y$ определяется по формуле $f(x, y) = \max(1, y - x + 1)$.

$\vee$ выражается через импликацию следующим образом:

$$\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} =_{\mathrm{df}} (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B}) \to \mathfrak{B}.$$

Предположим, что примитивные функции будут

$$F_1(X_1, X_2, \ldots, X_{\beta_1}), F_2(X_1, X_2, \ldots, X_{\beta_2}), \ldots$$

$$\ldots, F_b(X_1, X_2, \ldots, X_{\beta_b}) \text{ и } \alpha = \max(\beta_1, \beta_1, \ldots, \beta_b).$$

Если $X_1, X_2, \ldots, X_\alpha$ принимают соответственно значения $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$, то $F_i(X_1, X_2, \ldots, X_{\beta_i})$ примет значение $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_{\beta_i})$ $(i = 1, 2, \ldots, b)$ ($f_l$ является функцией истинности, соответствующей примитивной $F_l$).

Функции $\to_l$ и $\uparrow$ вводятся следующим образом:

$$\mathfrak{A} \to_1 \mathfrak{B} =_{\mathrm{df}} \mathfrak{A} \to \mathfrak{B},\ \mathfrak{A} \to_{l+1} \mathfrak{B} =_{\mathrm{df}} \mathfrak{A} \to (\mathfrak{A} \to_l \mathfrak{B}).$$

Когда $\mathfrak{A}$ принимает значение 1, $\mathfrak{A} \to_{m-2} \mathfrak{B}$ принимает значение, равное значению $\mathfrak{B}$. Когда $\mathfrak{A}$ имеет значение 2, а $\mathfrak{B} — m$, $\mathfrak{A} \to_{m-2} \mathfrak{B}$ получает значение 2; во всех других случаях $\mathfrak{A} \to_{m-2} \mathfrak{B}$ равно 1.

$$\mathfrak{A} \uparrow \mathfrak{B} =_{\mathrm{df}} (\mathfrak{A} \to_{m-2} \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{A}.$$

Когда $X$ принимает значение 2, а $Y$ — значение $m$, $X \uparrow Y$ получает значение 2. Для всех остальных случаев $X \uparrow Y$ принимает значение 1.

Далее определяются функции $V_{i1}$, $V_{i2}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

(Формула $B \uparrow C$, соединенная с другой через $\to$ или $\to\!\!\to$, в скобки не заключается.)

$$V_{11}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) =_{\mathrm{df}} V_{12}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) =_{\mathrm{df}} \mathfrak{A} \vee (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C})$$

$$V_{21}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) =_{\mathrm{df}} (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C} \to \mathfrak{A}) \vee (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C})$$

$$V_{22}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) =_{\mathrm{df}} (\mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C}) \vee (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C})$$

$$V_{i1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) =_{\mathrm{df}} (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C} \to\!\!\to_{i-1} \mathfrak{A}) \vee (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C})$$
$$(i = 3, 4, \ldots, m)$$

$$V_{i2}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) =_{\mathrm{df}} ((\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C} \to\!\!\to_{i-2} \mathfrak{A}) \to \mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C}) \vee (\mathfrak{B} \uparrow \mathfrak{C}) \quad (i = 3, 4, \ldots, m).$$

Функции $V$ сходны с функциями $J$ Россера и Теркуэтта. Когда $Y$ имеет значение 2, а $Z$ — значение $m$, одна из формул $V_{i1}$, $V_{i2}$ имеет значение 2, если $X$ не принимает значения $i$; для $X$, равного $i$, $V_{i1}, V_{i2}$ равны 1. Если $Y$ не принимает значения 2, а $Z$ не принимает значения $m$, то $V_{i1}(X, Y, Z)$, $V_{i2}(X, Y, Z)$ имеют значение 1.

Вместо $\to\!\!\to_{m-1}$ автор пишет $\to\!\!\to$. Этот символ удовлетворяет стандартным условиям Россера и Теркуэтта. Приводятся следующие схемы аксиом:

A1. $((\mathfrak{A} \to\!\!\to \mathfrak{B}) \to\!\!\to \mathfrak{C}) \to\!\!\to ((\mathfrak{C} \to\!\!\to \mathfrak{A}) \to\!\!\to (\mathfrak{D} \to\!\!\to \mathfrak{A}))$.

A2. $\prod_{l=1}^{m} (V_{i1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \to\!\!\to (V_{i2}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \to\!\!\to \mathfrak{D})) \mathfrak{D}$.

A3. $\prod_{j=1}^{3} \prod_{j=1}^{\beta_i} V_{k_{j1}}(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \prod_{j=1}^{\beta_i} V_{k_{j2}}(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) V_{\lambda 1}(F_i(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{\beta_i}), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$,

где $\lambda = f_i(k_1, k_2, \ldots, k_{\beta_i})$ и $i = 1, 2, \ldots, b$.

A4. $\prod_{j=1}^{\beta_i} V_{k_{j1}}(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) \prod_{j=1}^{\beta_i} V_{k_{j2}}(\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}) V_{\lambda 2}(F_i(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{\beta_i}), \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$,

где $\lambda = f_i(k_1, k_2, \ldots, k_{\beta_i})$ и $i = 1, 2, \ldots, b$.

В аксиомах использован символ суммы $\Gamma$ Россера и Теркуэтта:

$$\prod_{l=a}^{c} \mathfrak{A}_l \mathfrak{B} =_{\mathrm{df}} \mathfrak{B} \quad (c < a),$$

$$\prod_{l=a}^{c} \mathfrak{A}_l \mathfrak{B} =_{\mathrm{df}} \mathfrak{A}_c \to\!\!\to \left(\prod_{l=a}^{c-1} \mathfrak{A}_l \mathfrak{B}\right) \quad (c \geqslant a).$$

В исчислении два правила:

($\alpha$). Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A} \to\!\!\to \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{B}$.

($\beta$). Если $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ — различные переменные суждения, которые не встречаются в $\mathfrak{A}$, и $V_{11}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ — теорема, то $\mathfrak{A}$ — теорема.

Доказаны слабая полнота системы, а также предложение: если схемы аксиом заменить соответствующими аксиомами, добавив правило подстановки, то полученная система будет сильно полной.

*Т. Л. Майстрова*

**5030. Идеи переменного и функции. Менгер** (The ideas of variable and function. Menger Karl), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 9, 956—961 (англ.)

Различаются три концепции переменного и функции: логическая, научная и математическая. Логическая концепция. Функция $f$ есть непустое множество упорядоченных пар чисел, не содержащее двух пар с равными первыми и неравными вторыми элементами. Множество всех первых элементов называется областью определения $f$, а множество всех вторых элементов — множеством значений $f$. Действительное переменное есть символ, заменяющий любой элемент некоторого множества действительных чисел, называемого множеством значений переменного. Если $(x, y) \in f$, то $y$ обозначается через $f(x)$.

Научная концепция. Переменное $\theta$ (температура газа) есть сопоставление каждому «выбору» («specimen») $\theta$, т. е. каждому акту чтения показания термометра, погруженного в газ, «значения» $\theta$, т. е. наблюденного показания. Давление газа $p$ — другое переменное. Предположим, что рассматриваемый газ имеет постоянный объем, и приведем в соответствие выборы $\theta$ и $p$, происходящие одновременно (и относящиеся к одному и тому же газу). Как показывает эксперимент, если значения двух выборов $p$ равны, то равны и значения соответствующих выборов $\theta$; в таком случае говорят, что $\theta$ есть функция от $p$.

Математическая концепция — промежуточная между логической и научной. «Математическое переменное» $u$ есть множество пар $(a, \alpha)$, где $a$ — элемент абстрактного множества $A$ («род» (species) $u$), а $\alpha$ принадлежит множеству чисел $U$ («множеству значений» $u$). Пусть $B$ — род переменного $v$ и $P$ — взаимно однозначное соответствие между $A$ и $B$, т. е. такое множество пар $(a, b)$, что каждый элемент $a \in A$, равно как и каждый элемент $b \in B$, принадлежит ровно одной паре из $P$. Переменное $v$ есть «математическая функция» от переменного $u$ относительно $P$, если множество пар $(\alpha, \beta)$ для всех пар $(a, b) \in P$ образует функцию в смысле логической концепции. Такая математическая функция обозначается $(vPu)$, причем $u$ называется независимым, а $v$ зависимым переменным.

На ряде примеров проводится сравнение между тремя изложенными концепциями. Отмечаются неудобства традиционной символики для обозначения функций и переменных, приводящей к смешению различных концепций, а иногда и к выражениям, не имеющим однозначного смысла. *В. А. Успенский*

**5031 К. Новая система модальной логики. Райт** (A new system of modal logic. Wright G. H., Actes du XIème Congrès International de Philosophie, Bruxelles, 20—26 Août 1953, vol. V, pp. 59—63, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, Editions E. Nauwelaerts, Louvain, 1953) (англ.)

Автор вводит в модальную логику символ $M(p/q)$, который можно читать «если дано $q$, то $p$ возможно». Тогда $\sim M(p/q)$ читается «если дано $q$, то $p$ невозможно». Единственные выражения, которые допускаются к рассмотрению, это элементарные $M$-выражения первого порядка и составленные из них комплексы. Такие выражения называются однородными $M$-выражениями первого порядка. Автор кладет в основу следующие аксиомы:

$$\text{A1.}\quad M(t/t). \qquad \text{A2.}\quad \sim M(\sim t/t)$$

$$\text{A3.}\quad M(p/t) \to M(q/p) \vee M(\sim q/p)$$

$$\text{A4.}\quad M(p\&q/t) \longleftrightarrow M(p/t)\,\&M(q/p).$$

Он пользуется правилом: «если эквивалентность двух $M$-выражений нулевого порядка может быть доказана в пропозициональной логике, то эти выражения могут заменять друг друга в $M$-выражениях первого порядка». Буква $t$ представляет произвольную тавтологию пропозициональной логики, и возможность определяется посредством $\Diamond p = {}_{df} M(p/t)$. Автор доказывает в системе две теоремы и затем показывает, что фрагменты некоторых классических систем, которые содержат только однородные модальные выражения первого порядка, являются собственными подсистемами его системы.

Рассматривается понятие следования, и автор высказывает предположение, что некоторые аналоги парадоксов строгой импликации не могут быть получены в его системе. Затем рассматриваются отношения между системой автора и теорией вероятностей. Работа заканчивается кратким рассмотрением модальностей высшего порядка. *A. Rose*

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 3, 189.

**5032 К. Введение в символическую логику. Бассон, О'Коннор** (Introduction to symbolic logic. Basson A., O'Connor D. J., VIII + + 169 pp., University Tutorial Press, 1953, 7 s. 6d.), Math. Gaz., 1954, **38**, № 323, 11 (библ.)

**5033 РЕЦ. Об арифметических моделях для непротиворечивых формул исчисления предикатов. Крейсел** (Note on arithmetic models for consistent formulae of the predicate calculus. Kreisel G., Fundam. mat., 1950, **37**, 265—285) [**Рецензия: Ван Хао** (Wang Hao), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 2, 180—181 (англ.)]

**5034 РЕЦ. Математическая логика. Хермес-Шольц** (Mathematische Logik. Hermes-Scholz (Enzyklop die der mathematischen Wissenschaften, Bd. I, № 1. I. Teil, 57 S., Teubner, Lpz., 1952, 8 20 DM) [**Рецензия: Булиган** (Bouligand G.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1953, **60**, № 7-8, 252 (франц.)]

**5035 РЕЦ. Исследования по модальной логике. Беккер** (Untersuchungen über den Modalkalkül. Becker Oskar. 87 S., Westkulturverlag Anton Hain, Meisenheim am Glan, 1952) [**Рецензия: Паррн** (Parry William T.), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 4, 327—329 (англ.)]

**5036 РЕЦ. Очерк по модальной логике. Райт** (An essay in modal logic. Wright C. H. von. VI + 90 pp., ill., North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1951, 9 fl.) [**Рецензия: Гудстейн** (Goodstein R. L.), Math. Gaz., 1953, **37**, № 321, 226 (англ.)]

**5037 РЕЦ. О метаматематике алгебры. Робинсон** (On the metamathematics of algebra. Robinson A. IX + 195 pp., North-Holland Pu-

blishing Co., Amsterdam, 1951, 18. 00 fl.) [Рецензии: **Фринк** (Frink Orrin), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 6, 582—583 (англ.); **Переманс** (Peremans W.), Nieuw arch. Wiskunde, 1953, 1, № 2, 150—153 (голл.)]

5038 РЖМ. **Силлогистика Аристотеля с точки зрения современной формальной логики. Лукасевич** (Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic. Łukasiewicz Jan, X + 141 pp., Clarendon Press, Oxford, 1951, 15 s.) [Рецензия: **Вуджер** (Woodger J. H.), Brit. J. Philos. Sci., 1953, 4, № 15, 251—252 (англ.)]

См. также: 5225

## ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

5039. **К гильбертову решению проблемы Варинга: оценка $g(n)$. Ригер** (Zur Hilbertschen Lösung des Waringschen Problems: Abschätzung von $g(n)$. Rieger G. J.), Arch. Math., 1953, 4, № 4, 275—281 (нем.)

Как известно, всякое натуральное число $N$ можно представить в виде

$$N = \sum_{k=1}^{r} x_k^n,$$

где $n$, $x_k$ — натуральные числа ($k = 1, 2, \ldots, r$), $r \leqslant g(n)$, $g(n)$ зависит только от $n$, но не от $N$ (теорема Варинга—Гильберта).

Дается оценка $g(n)$:

$$g(n) < (2n+1)^{260(n+3)^{3n+8}}$$

Приводя, как весьма точную, оценку (для $G(n)$) Харди—Литлвуда (вместо значительно более точной известной оценки И. М. Виноградова:

$$G(n) < n(3\log n + 11)),$$

автор указывает на цель реферируемой работы: установить, что гильбертово решение проблемы Варинга позволяет вообще оценить $g(n)$ и притом элементарными методами. *Г. В. Емельянов*

5040. **О проблеме разбиений в вещественном квадратичном поле. Мейнардус** (Über das Partitionenproblem eines reell-quadratischen Zahlkörpers. Meinardus Günter), Math. Ann., 1953, 126, № 4, 343—361 (нем.)

Пусть $P(\mu)$ — число представлений целого вполне положительного числа $\mu$ вещественного квадратичного поля $R(\sqrt{d})$ в виде суммы целых вполне положительных слагаемых того же поля, причем число слагаемых может быть какое угодно. При счете представлений два представления, отличающиеся друг от друга только порядком слагаемых, не считаются различными.

Радемахер (Rademacher H., Proc. Internat. Congress Math., Cambridge, Mass., 1950, 1, 356—362) дал для $P(\mu)$ оценку сверху:

$$P(\mu) \ll \exp\left(N^{\frac{5}{14}+\delta}\right),$$

где $N = N(\mu)$ — норма числа $\mu$, $\delta > 0$.

В реферируемой работе доказывается асимптотическая формула

$$P(\mu) = \exp\left\{3\sqrt[3]{\frac{\zeta(3)}{\sqrt{d}}N} + \alpha_1 \log^2 N + \alpha_2 \log N + \mathfrak{S}(\mu)\right\}\left[1 + O\left(N^{-\frac{1}{21}}\right)\right].$$

Здесь $\zeta(s)$ — функция Римана, $d$ — дискриминант поля, $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — вещественные постоянные, $\mathfrak{S}(\mu)$ — ограниченная функция от $\mu$. Для $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\mathfrak{S}(\mu)$ даны явные выражения в виде бесконечных рядов, содержащих $\zeta$-функции Гекке, $\zeta$-функцию Римана и $\Gamma$-функцию. *И. П. Кубилюс*

5041. **О сумматорных функциях характеров числовых полугрупп. Бредихин Б. М.,** Докл. АН СССР, 1954, 94, № 4, 609—612

Ранее другими авторами была доказана неограниченность сумматорной функции характеров, определенных на полугруппе положительных алгебраических чисел с конечной базой, состоящей не менее чем из двух элементов. А. О. Гельфондом была высказана гипотеза, что аналогичная теорема имеет место для полугрупп, состоящих из любых вещественных чисел. Это предположение доказывается в реферируемой заметке. Точная формулировка заключается в следующем:

Пусть $\chi(\alpha)$ — характер полугруппы вещественных чисел с базой $\omega_1, \ldots, \omega_N$ ($\omega_i > 1$), $N > 1$,

$$|\chi(\omega_i)| = 1,\ i = 1, \ldots, N;\ H(x) = \sum_{\alpha \leqslant e^x} \chi(\alpha),$$

$M_{k,l}(x)$ — число знаменателей подходящих дробей числа $\dfrac{\lg \omega_l}{\lg \omega_k}$ в интервале $[0, x]$. Тогда

$$\max_{x \in [0,\xi]} |H(x)| \gg \sqrt{\max_{k,l} M_{k,l}(\sqrt{\xi}\lg^{-3/2}\xi)}.$$

В частности, всегда

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} H(x) = \infty.$$

*И. И. Пятецкий-Шапиро*

5042. **О проблеме Харди относительно распределения целых чисел с заданным числом простых делителей. II. Сатхе** (On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors. II. Sathe L. G.), J. Indian Math. Soc., 1953, 17, № 3, 83—141 (англ.)

Статья является окончанием мемуара, основные результаты которого реферировались ранее (РЖМат, 1954, 3596).

В этой 2-й части мемуара исследуется асимптотическое поведение суммы

$$S_\nu(x,n)=\sum_{q_\nu\leqslant x}(\lg q_\nu)^n q_\nu^{-1} \text{ при } x\to\infty,$$

где $q_\nu$ пробегает все бесквадратные числа, имеющие ровно $\nu$ простых делителей. В частности, показано, что главная часть $S_\nu(x,n)$ равна величине

$$(\lg x)^n\sum_{l=0}^{\nu-1}a_l(\ln\ln x)^l,$$

где $a_l$ — коэффициенты, не зависящие от $x$.

*Н. Г. Чудаков*

**5043. Односторонние неравенства для квадратичных форм. II. Четверничные формы. Оппенгейм** (One-sided inequalities for quadratic forms. II. Quaternary forms. Oppenheim A.), Proc. London Math. Soc., 1953, сер. 3, **3**, № 12, 417—429 (англ.)

Пусть $f(x,y,z,t)$ — неопределенная четверничная квадратичная форма с вещественными коэффициентами от целых $x,y,z,t$, не равных одновременно нулю, определителя $\Delta\neq 0$ и сигнатуры $s$.

Пусть $P_1(f)$ — точная нижняя граница множества положительных значений $f$, $P_2(f)=P_1(-f)$,

$$I_1=P_1^4/|\Delta|,\quad I_2=P_2^4/|\Delta|.$$

Используя результаты первой части настоящей работы, посвященной тройничным формам (РЖМат, 1954, 3211), автор доказывает две теоремы.

Теорема 1. Если $f$ — форма с сигнатурой $s=0$ определителя $\Delta>0$, то

$$I_1=16 \text{ при } f\sim P_1(xy+zt),$$
$$I_1=\frac{81}{16} \text{ при } f\sim\frac{1}{3}P_1(-x^2+4y^2+4zt),$$
$$I_1=4 \text{ при } f\sim P_1(xy+2zt) \text{ или } \sim P_1(xy+z^2-t^2),$$
$$I_1=\frac{16}{5} \text{ при } f\sim P_1(xy+z^2+zt-t^2)$$

и $I_1\leqslant\frac{256}{81}$ для остальных форм $f$.

Для $I_2$ результаты такие же, как и для $I_1$, так как форма $-f$ имеет сигнатуру 0.

Теорема 2. Если $f$ — форма с сигнатурой $s=2$ определителя $\Delta<0$, то

a) $I_1=\frac{16}{3}$ при $f/P_1\sim x^2+xy+y^2+zt$,

$I_1=4$ при $f/P_1\sim x^2+y^2+zt$

и $I_1<\frac{2048}{729}$ для остальных форм $f$;

b) $I_2=\frac{256}{27}$ при $f/P_2\sim\frac{1}{2}(x^2+xy+y^2+3zt)$

и $I_2<7{,}6$ для остальных форм $f$.

Автор отмечает, что его метод исследования может быть применен к неопределенным формам пяти и более переменных.

*И. Г. Мельников*

**5044. Произведение $n$ неоднородных линейных форм. Роджерс** (The product of $n$ non-homogeneous linear forms. Rogers C. A.), Proc. London Math. Soc., 1954, сер. 3, **4**, № 13, 50—83 (англ.)

Пусть

$$x_i=a_i^{(1)}u_1+\cdots+a_i^{(n)}u_n\quad(i=1,\ldots,n)\qquad(1)$$

— линейные формы с отличным от нуля детерминантом $\Delta$, а $b_1,\ldots,b_n$ — вещественные числа. В работе выясняются условия, когда неравенства

$$|(x_1+b_1)\cdots(x_n+b_n)|<1,$$
$$(x_1+b_1)^2+\cdots+(x_r+b_r)^2<\varepsilon^2,\quad 1\leqslant r<n,\qquad(2)$$

имеют для любого $\varepsilon>0$ бесконечное число решений в целых числах $u_1,\ldots,u_n$. Очевидно, необходимо, чтобы $\lambda_1b_1+\cdots+\lambda_rb_r$ было целым числом для любого множества вещественных чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ таких, что форма

$$\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_rx_r$$

имеет целые коэффициенты. В работе устанавливается, что при выполнении указанного условия и достаточно малом определителе $\Delta$ системы (1) неравенства (2) имеют бесконечное число решений. Далее рассматривается ряд аналогичных вопросов. В частности, рассматривается вопрос о существовании решений (2), для которых дополнительно имеют место односторонние неравенства

$$x_1+b_1>0,\ldots,x_n+b_n>0.$$

*И. И. Пятецкий-Шапиро*

**5045. Представления сравнениями в алгебраических числовых полях. Коэн** (Congruence representations in algebraic number fields. Cohen Eckford), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **75**, № 3, 444—470 (англ.)

Пусть $F$ — поле алгебраических чисел, $\mathfrak{d}$ — дифферента $F$, $\zeta\in F$, $(\zeta)\mathfrak{d}=B/A$, $A$ и $B$ — целые взаимно простые идеалы $F$,

$$\varepsilon_\nu(\beta)=\exp[2\pi iS(\beta\nu\zeta)],\ \beta,\nu \text{ — целые из } F.$$

Пусть для каждого $i=1,\ldots,s$ $Z_i$ есть конечное множество целых чисел из $F$, в котором могут быть и равные друг другу. Число решений сравнения $\xi_1+\cdots+\xi_s\equiv\rho\pmod A$, $\rho$—целое, где $\xi_i\in Z_i$, выражается следующей формулой

$$\Delta(\rho)=\frac{1}{N(A)}\sum_{\nu(\mathrm{mod}\,A)}\varepsilon_\nu(\rho)\prod_{i=1}^{s}\Big(\sum_{\xi\in Z_i}\varepsilon_\nu(-\xi)\Big).$$

Применяя формулу для $\Delta(\rho)$ и используя суммы Гекке $S(\alpha,A)=\sum_{\nu(\mathrm{mod}\,A)}\varepsilon_{\nu^2}(\alpha)$ и Радемахера $R(\alpha,A)=\sum_{(\nu,A)=1}\varepsilon_\nu(\alpha)$ (являющиеся обобщениями

на случай алгебраического числового поля известных сумм Гаусса и Рамануджана), автор устанавливает далее формулы для числа решений сравнений

$$\rho \equiv \alpha_1 x_{11} \cdots x_{l1} + \cdots + \alpha_s x_{1s} \cdots x_{ls} \pmod{A},$$
$$\rho \equiv \beta_1 \xi_1^2 + \cdots + \beta_s \xi_s^2 \pmod{A}. \qquad (*)$$

Здесь $\rho, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_s$ — целые; хоть одно $\alpha_i$ и все $\beta_i$ взаимно просты с $A$; в случае сравнения (*) $A$ — нечетный идеал; $(x_{ij}, A) = 1$.

Полученные формулы громоздки, но имеют вполне законченный вид. Как следствие получено, что при $s \geqslant 3$ сравнение (*) всегда имеет решения, а для $s = 2$ дано необходимое и достаточное условие существования решения.

В работе содержится также алгебраическая интерпретация свойств арифметических функций. Пусть $K$ — поле характеристики 0, содержащее все корни из 1. Функция $f$, определенная на целых числах $\alpha \in F$, $f(\alpha) \in K$, называется $(A, K)$-арифметической, если $f(\alpha) = f(\beta)$ при $\alpha \equiv \beta \pmod{A}$. Все $(A, K)$-арифметические функции образуют коммутативную полупростую алгебру ранга $N(A)$ над полем $K$ относительно умножения $(fg)(\alpha) = \sum_{\xi \pmod{A}} f(\xi)\, g(\alpha - \xi)$. Функции $\varepsilon_\nu (\nu \bmod A)$ образуют ортогональный базис этой алгебры. Функции вида

$$f(\alpha) = \sum_{A_i \mid A} a_i R(\alpha, A_i), \quad a_i \in K,$$

образуют подалгебру с ортогональным базисом $R(\alpha, A_i)$. Доказываются соотношения

$$\sum_{\alpha \pmod{A}} (R(\alpha, A))^2 = N(A)\, \varphi(A),$$

$$\sum_{\alpha \pmod{AC}} R(\alpha, A)\, R(\alpha, C) = 0, \quad A \neq C,$$

которые являются обобщениями аналогичных соотношений Кармихаэля для сумм Рамануджана.

*З. И. Боревич*

**5046. О первом множителе числа классов одного циклического поля. Карлиц** (The first factor of the class number of a cyclic field. Carlitz Leonard), Canad. J. Math., 1954, 6, № 1, 23—26 (англ.)

Обозначим: $p$ — простое целое рациональное число $> 3$, $R$ — поле рациональных чисел, $R(\zeta)$ — поле деления круга ($\zeta = \exp 2\pi i / p$), $f(x) = r_0 + r_1 x + \cdots + r_{p-2} x^{p-2}$; $Z = \exp 2\pi i / (p-1)$; $r$ — примитивный корень $\bmod p$, $r^i \equiv r_i \pmod{p}$ и $1 \leqslant r_i \leqslant p-1$. Для «первого множителя» числа классов идеалов $R(\zeta)$ имеется выражение:

$$h = (2p)^{-\frac{1}{2}(p-3)} f(Z) f(Z^3) \cdots f(Z^{p-2}). \qquad (1)$$

Вандивер (Vandiver H. S., Bull. Amer. Math. Soc., 1918—1919, **25**, 458—461) обобщил теорему Куммера о разложении по $\bmod p$ «первого множителя» числа классов идеалов $R(\zeta)$ на произведение бернуллиевых чисел, полученное им сравнение имеет такой вид:

$$h \equiv 2^{-\frac{1}{2}(p-3)} p \prod_{s=1, 3, \ldots, p-3} B_{sp^n+1} \pmod{p^n}. \qquad (2)$$

Пусть $p - 1 = ab$, где $b$ — нечетное $\neq 1$. В циклическом поле $K \subset R(\zeta)$, порядка $a$ над $R$, Бегером (Beeger N. G. W. H., Koninkl. Akad. Wetensch. Amsterdam, 1918, **27**, 324—336) найдено выражение для числа классов идеалов $H = h_a \Delta / R$, причем первый множитель $h_a$ определяется формулой

$$h_a = 2^{-\frac{1}{2}(a-2)} p^{-\frac{1}{2}a} \prod_{u=1, 3, \ldots, a-1} f(Z^{bu}). \qquad (3)$$

Автор статьи применяет метод Куммера — Вандивера к вычислению для $h_a$ сравнения, аналогичного (2). Он получает:

$$h_a \equiv 2^{-\frac{1}{2}(a-2)} \prod_{u=1, 3, \ldots, a-1;\ n \geqslant 1} B_{bup^n+1} \pmod{p^n},$$

применяя найденный результат к числу классов идеалов квадратичного поля $K = R(\sqrt{-p})$ $\left(p \equiv 3 \pmod 4,\ a = 2,\ b = \frac{1}{2}(p-1)\right)$, находит:

$$-h = h_2 \equiv B_{\frac{1}{2}(p-1)p^n+1} \pmod{p^n},$$

$$h \equiv -2B_{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}.$$

Последнее сравнение позволяет заключить, что $B_{\frac{p+1}{2}} \not\equiv 0 \pmod{p}$.

*П. Н. Ремеров*

**5047. Инвариантная теория уравнений в конечном поле. Карлиц** (Invariantive theory of equations in a finite field. Carlitz L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **75**, № 3, 405—427 (англ.)

Пусть $GF(q)$ — фиксированное конечное поле с $q$ элементами. Рассмотрим взаимно однозначные преобразования

$$\varphi: \xi_i = \varphi_i(\eta_1, \ldots, \eta_r) \quad (i = 1, \ldots, r), \qquad (1)$$

$\varphi_i$ — многочлены с коэффициентами из $GF(q)$. Совокупность таких преобразований образует группу, изоморфную симметрической группе степени $q^r$. Два многочлена $f$ и $g$ называются эквивалентными, если существует преобразование вида (1) такое, что $f(\xi_1, \ldots, \xi_r) = g(\eta_1, \ldots, \eta_r)$. Два многочлена $f$ и $g$ называются равными, если совпадают их значения при всех значениях аргументов. При помощи понятия эквивалентности все многочлены можно разделить на некоторое число классов. Число классов оказывается равным

$$\frac{(q^r + q - 1)!}{(q-1)!\, q^r!}.$$

Задачей реферируемой статьи является выяснение пивариантных свойств многочлена $f(\xi_1, \ldots, \xi_r)$. Обозначим через $N_f(\alpha)$ число решений уравнения $f(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \alpha$. Доказывается, что два полинома $f$ и $g$ эквиваленты тогда и только тогда, когда $N_f(\alpha) = N_g(\alpha)$. Даются также некоторые переформулировки этого результата в терминах тригонометрических сумм.

Если система чисел $N_f(\alpha)$ есть некоторая перестановка чисел $N_g(\alpha)$, то $f$ и $g$ считаются принадлежащими к одной категории. При помощи несложных комбинаторных соображений подсчитывается число категорий и число классов в категории. В конце статьи рассматриваются некоторые примеры.

*И. И. Пятецкий-Шапиро*

5048. **Некоторые свойства разложений на слагаемые. Аткин, Суиннертон-Дайер** (Some properties of partitions. Atkin A. O. L., Swinnerton-Dyer P.), Proc. London Math. Soc., 1954, сер. 3, **4**, № 13, 84—106 (англ.)

Рангом разложения натурального числа на натуральные слагаемые называется разность между наибольшим слагаемым и числом слагаемых.

В связи с этим понятием рассматриваются две числовые функции: $N(m, n)$ — количество разложений ранга $m$ числа $n$ и $N(m, q, n)$ — количество разложений числа $n$, ранг которых сравним с $m$ по mod $q$.

Из определений этих функций легко получить, что $N(m, n) = N(-m, n)$ и $N(m, q, n) = N(q-m, q, n)$.

Из этих формул ясно, что можно ограничиться случаем неотрицательного ранга. Для этого случая получены производящие функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} N(m, n)\, x^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{\frac{1}{2}n(3n-1)+mn} (1 - x^n) \prod_{r=1}^{\infty} (1 - x^r)^{-1},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} N(m, q, n)\, x^n = \sum_{n=-\infty}^{+\infty\prime} (-1)^n x^{\frac{1}{2}n(3n+1)} \times$$

$$\times \frac{x^{mn} + x^{n(q-m)}}{1 - x^{qn}} \prod_{r=1}^{\infty} (1 - x^r)^{-1}.$$

Штрих у знака суммы означает отсутствие члена с $n = 0$.

Далее особое внимание уделено случаям $q = 5$ и $q = 7$. При этих значениях $q$ рассматривается функция

$$r_{bc}(d) = \sum_{n=0}^{\infty} [N(b, q, qn + d) - N(c, q, qn + d)]\, y^n.$$

Для этой функции получен ряд тождеств при различных значениях $b$, $c$ и $d$. В частности, для $q = 5$ имеем $r_{02}(4) = r_{12}(4) = 0$. Отсюда, как следствие, получается известное сравнение Рамануджана $p(5n + 4) \equiv 0 \pmod 5$, где $p(m)$ — число всех разложений $m$ на натуральные слагаемые (Венков Б. А., Элементарная теория чисел, ОНТИ, 1937, гл. V, § 3).

Второе сравнение Рамануджана $p(7n + 5) \equiv 0 \pmod 7$ получается из формул $r_{03}(5) = r_{13}(5) = r_{23}(5)$ для $q = 7$.

Аналогичные формулы для $q = 11$, по словам авторов, уже не имеют места, а потому третье сравнение Рамануджана $p(11n + 6) \equiv 0 \pmod{11}$ следует выводить из других соображений.

Этот вывод и получается при рассмотрении сравнений, которым удовлетворяет по mod $q$ функция

$$\Phi_q(b) = \sum_{n=0}^{\infty} p(qn + b)\, y^n \text{ для } q = 5,\ q=7 \text{ или } q=11$$

и $b$, принимающем все значения из полной системы наименьших неотрицательных вычетов по mod $q$.

*В. Д. Подсыпанин*

5049. **Выражение для функции Эйлера $\varphi$. Шоломити** (An expression for the Euler $\varphi$-function. Scholomiti N. C.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 1, 36—37 (англ.)

5050. **О числах, обратных простым. Сингх** (Concerning the reciprocal of a prime. Singh Daljit), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 1, 32—34 (англ.)

При обращении дробей $1/p$, где $p$ — простое, в десятичную часто оказывается, что $a$-ая цифра частного (периода) равна $a$-му остатку.

Пусть $q(a)$ есть $a$-ая цифра частного, $r(a)$ — $a$-й остаток. В статье элементарно доказываются 2 теоремы, имеющие специфический интерес:

1) Для простых чисел формы $p = 10n + s$, где $s = 1, 3, 7$, уравнение $q(a) = r(a)$ имеет решение лишь тогда, когда $r(a) = 5$.

2) Для простых чисел формы $p = 10n + 9$ уравнение $q(a) = r(a) = b$ возможно для всех значений $b$ $(1 \leqslant b \leqslant 9)$, исключая те $b$, для которых уравнение $r(a - 1) = b(n + 1)$ не имеет решения.

Следствие. Для простых чисел формы $p = 10n + 9$, $q(a) = r(a) = b$ $(1 \leqslant b \leqslant 9)$, если период дроби $1/p$ имеет $p - 1$ цифру.

*В. А. Голубев*

5051. **Нижняя граница для взаимно простых дружественных чисел. Канольд** (Untere Schranken für teilerfremde befreundete Zahlen. Kanold Hans-Joachim), Arch. Math., 1953, № 5—6, 399—401 (нем.)

Два числа $m_1$ и $m_2$ называются дружественными, если $\sigma(m_1) = \sigma(m_2) = m_1 + m_2$, где $\sigma(m)$ — сумма делителей $m$.

Доказывается, что, если дружественные числа взаимно просты, то они вместе содержат более 20 различных простых делителей и, кроме того, каждое из них больше $10^{23}$.

*В. Д. Подсыпанин*

5052. **Множители чисел Ферма. Селфридж** (Factors of Fermat numbers. Selfridge J. L.), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, **7**, № 44, 274—275 (англ.)

Сообщается о найденных на машине СВАК (SWAC) делителях чисел Ферма $F_n = 2^{2^n} + 1$:

$F_{10}$ имеет делитель 45592577,

$F_{16}$ имеет делитель 825753601.

Последний результат интересен тем, что он показывает, что не все числа вида

$$2^{2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}+1$$

простые.

Были испробованы все числа вида $D=(2k+1)2^r+1$, $D<2^{36}$, $k<2^{15}$, среди которых могли быть делители чисел Ферма. Эта работа заняла $3^1/_4$ часа.

*П. Н. Реморов*

**5053. Некоторые свойства чисел Фибоначчи. Субба-Рао** (Some properties of Fibonacci numbers. Subba Rao K.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 10, 680—684 (англ.)

В начале статьи приведен ряд формул, которые, по словам автора, могут быть доказаны по индукции. Среди этих формул много хорошо известных.

Далее доказывается следующая теорема:

Если $l=\left[\frac{k-1}{2}\frac{\log 5}{\log\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-k+2\right]$ и числа

$n_1, n_2, \ldots, n_k$ достаточно велики, то

$$u_{n_1+n_2+\cdots+n_k-l}<u_{n_1}u_{n_2}\cdots u_{n_k}<u_{n_1+n_2+\cdots+n_k-l+1},$$

и, кроме того, при достаточно большом $n$ между $u_n^k$ и $u_{n+m}^k$ содержится точно $km$ чисел Фибоначчи.

Здесь $u_n$ есть $n$-е число Фибоначчи. Однако надо заметить, что нумерация чисел Фибоначчи у автора несколько отличается от обычной, а именно он полагает $u_0=1$, $u_1=1$ и т. д.

*В. Д. Подсыпанин*

**5054. О 16-м и 17-м совершенных числах. Улер** (On the 16th and 17th perfect numbers. Uhler Horace S.), Scripta math., 1953, **19**, № 2—3, 128—131 (англ.)

В октябре 1952 г. при помощи вычислительной машины СВАК (SWAC) найдены точные значения по десятичной системе счисления 16-го и 17-го совершенных чисел, $v_{16}$ и $v_{17}$, имеющих соответственно 1327 и 1373 цифры. Вычисления произведены двумя способами.

В статье даны значения по десятичной системе счисления чисел $v_{16}=2^{4405}-2^{2202}$, $v_{17}=2^{4561}-2^{2280}$ и чисел $2^{560}$, $2^{2202}$, $2^{2280}$, $2^{4561}$, $2^{4405}$.

*В. А. Голубев*

**5055. Квадраты в арифметической прогрессии. Уитлок** (Squares in arithmetical progression. Whitlock W. P., Jr.), Scripta math., 1953, **19**, № 2—3, 206—207 (англ.)

Задача нахождения трех полных квадратов, образующих арифметическую прогрессию, сводится к неопределенному уравнению $x^2+z^2=2y^2$.

Приведя известное решение этого уравнения, автор замечает, что $x$ можно рассматривать как сумму катетов пифагорова треугольника, $y$ как его гипотенузу, а $z$ как разность катетов.

*В. Д. Подсыпанин*

**5056. Циклическое число 142857. Коста-Альяга** (The cyclic number 142857. Costa Aliaga C. A.), Scripta math., 1953, **19**, № 2—3, 181—184 (англ.)

Если произведения данного числа на небольшие множители 2, 3... получаются из этого числа путем циклической перестановки его цифр, то число называется циклическим. Такие числа получаются в периоде разложения в десятичную дробь $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{17}$ и т. д.

В статье приводятся различные числовые тождества, в которых участвует число 142857 — период разложения в десятичную дробь $\frac{1}{7}$.

*В. Д. Подсыпанин*

**5057. Числа и системы счисления. Фейтис** (Čísla a číselné soustavy. Feytis Jaroslav), Mat.-přírodoved. rozhl., 1953, **32**, № 6, 169—174 (чеш.)

**5058 К. Теория дзета-функции Римана. Титчмарш Е. К.**, перевод с англ. М. А. Евграфова, под ред. А. О. Гельфонда, 407 стр., Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953, 20 р. 90 к.

В книге, переведенной с оксфордского издания 1951 г., дается полное изложение всех важнейших результатов теории дзета-функции Эйлера — Римана. Первая книга автора, посвященная тому же вопросу, была им написана в 1930 г. (русский перевод: Титчмарш Е. К., Дзета-функция Римана, Изд-во иностр. лит-ры, 1947) и содержала сравнительно небольшой материал. С 1930 г. изучение дзета-функции было существенно продвинуто вперед благодаря применению метода И. М. Виноградова, результатам А. Селберга, работам самого автора и других математиков. В книге, наряду с более ранними работами, систематически излагаются и все эти новые результаты, давая, таким образом, представление о весьма разнообразных методах, разработанных в весьма обширной журнальной литературе по теории дзета-функции.

Рассмотрение свойств дзета-функции, как обычно, сосредоточивается вокруг вопросов поведения этой функции в критической полосе, оценки асимптотического роста ее модуля и изучения распределения ее нулей, т. е. как раз именно тех вопросов, которые существенны для многочисленных применений этой функции в теории чисел. Автор в очень небольшой степени затронул сами приложения дзета-функции. В этом отношении в книге приводятся только некоторые методы исследования проблемы делителей, непосредственно связанные с дзета-функцией, и очень небольшой материал, устанавливающий связь между этой функцией и отдельными числовыми функциями. Приводится доказательство асимптотического закона распределения простых чисел, однако в книге не рассмотрены более глубокие связи расположения нулей дзета-функции с распределением простых чисел и другими арифметическими фактами. Ограничиваясь, таким образом, в основном материалом, относящимся непосредственно к самой дзета-функции, книга зато с большой полнотой дает представление о том, что известно об этой функции в настоящее время.

Книга состоит из пятнадцати глав. В первой главе дается ряд тождеств, устанавливающих связь между дзета-функцией и некоторыми рядами Дирихле, часто встречающимися в аналитической теории

чисел. Во второй главе рассматривается несколько способов аналитического продолжения дзета-функции, приводящих к различным выводам основного для всего дальнейшего функционального уравнения, и дается также разложение этой функции в бесконечное произведение по нулям.

В третьей главе устанавливается отсутствие нулей $\zeta(s)$ на прямой $\sigma = 1$, где $\sigma$ — действительная часть $s$, и в некоторой области вблизи этой прямой. В этой же главе изучается поведение на прямой $\sigma = 1$ и других рядов Дирихле, имеющих основное значение в исследованиях вопросов распределения простых чисел. В четвертой главе рассматриваются различные приближения функции $\zeta(s)$ конечными суммами или, как это принято говорить, приближенные функциональные уравнения.

В пятой главе исследуется рост модуля дзета-функции в критической полосе. В шестой главе излагается метод И. М. Виноградова, дающий наилучшие из всех известных до сих пор оценки роста $|\zeta(s)|$ на прямой $\sigma = 1$ и вблизи этой прямой. Седьмая глава содержит так называемые теоремы о средних значениях. Здесь исследуется функция $\int_1^T |\zeta(\sigma + it)|^{2k}\, dt$ при $T \to \infty$ и функция $\int_0^\infty |\zeta(\sigma + it)|^{2k} e^{-\delta t} dt$ при $\delta \to 0$. Восьмая глава посвящена так называемым $\Omega$ теоремам для функции $\zeta(s)$, т. е. теоремам, определяющим функцию $\varphi(t)$ такую, что неравенство $|\zeta(\sigma+it)| > \varphi(t)$ удовлетворяется для сколь угодно больших значений $t$. Теоремы такого типа устанавливаются и для функции $[\zeta(s)]^{-1}$.

В девятой главе выводятся асимптотические формулы для функции $N(T)$, выражающей число нулей функции $\zeta(\sigma + it)$ в области $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$, $0 < t \leqslant T$. Изучается также связанная с ней функция

$$S(T) = \pi^{-1} \arg \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right).$$

Далее даны некоторые теоремы, связанные с этими асимптотическими формулами; в частности, доказывается теорема Литлвуда, устанавливающая порядок стремления к нулю расстояния между соседними нулями в критической полосе. Во второй половине главы рассматривается более общая функция $N(\sigma, T)$, выражающая число нулей $\beta + i\gamma$ функции $\zeta(s)$ в области $\beta > \sigma$, $0 < \gamma \leqslant T$.

В десятой главе изучаются нули дзета-функции на прямой $\sigma = 1/2$. Излагаются различные методы доказательства бесконечности числа нулей на этой прямой. Основное содержание этой главы — теорема А. Селберга, дающая весьма хорошую оценку для числа $N_0(T)$ нулей дзета-функции вида $1/2 + it$, $0 < t \leqslant T$. Согласно этой теореме $N_0(T) > AT \ln T$. Перед доказательством этой теоремы, полученной Селбергом в 1942 г., приводится более слабый, но зато более простой по доказательству результат Харди.

В одиннадцатой главе рассматривается вопрос о распределении точек $s$, в которых $\zeta(s)$ принимает некоторое заданное значение. В двенадцатой главе даны приложения дзета-функции к исследованию функций

$$D_k(x) = \sum_{n \leqslant x} \tau_k(n),$$

где $\tau_k(n)$ — число представлений $n$ в виде произведения $k$ сомножителей. Для этих функций даются асимптотические формулы, причем остаточные члены оцениваются в пределах, близких к доступной в настоящее время точности. Тринадцатая глава рассматривает ряд вопросов, связанных с так называемой гипотезой Линделёфа, заключающейся в том, что для любого $\varepsilon > 0$ $\zeta(1/2 + it) = O(t^\varepsilon)$.

Значительное место в книге занимает четырнадцатая глава. Здесь для целого ряда вопросов, рассмотренных в предыдущих главах, указываются результаты, которые можно получить в предположении справедливости недоказанной гипотезы Римана о том, что все недействительные нули $\zeta(s)$ лежат на прямой $\sigma = \frac{1}{2}$. Дается также ряд теорем, устанавливающих связь между расположением нулей дзета-функции и оценками $M(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu(n)$, где $\mu(n)$ — функция Мёбиуса. В последней пятнадцатой главе приведены указания на способы, применявшиеся для вычисления нулей дзета-функции в критической полосе, и приведены некоторые результаты этих вычислений.

*А. А. Бухштаб*

5059 **РЕЦ.** **Высшая арифметика, введение в теорию чисел. Давенпорт** (The higher arithmetic, an introduction to the theory of numbers. Davenport H. (London, Hutchinson's University Library, 1952, 8 s. 6d.), pp. VIII+72, New York: Longmans, Green and Co., 2.25 doll.)

**Введение в теорию чисел. Крайчик** (Introduction à la théorie des nombres. Kraïtchik M., pp. VII + 202, Paris, Gauthier — Villars, 1952) [**Рецензия: Уре** (Ore Oystein), Scripta math., 1953, **19**, № 2—3, 165—166 (англ.)]

**См. также:** 5018, 5021, 5072, 5254

## АЛГЕБРА

5060 К. **Курс высшей алгебры. Курош А. Г.,** Изд. 3, 335 стр., Гостехиздат, М., 1953, 9 р. 15 к.

Книга является учебником для студентов первого курса университета. Третье издание отличается от второго лишь немногими редакционными изменениями. *А. И. Узков*

### МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

5061. **Существенные особые многообразия разностных многочленов. Кон** (Essential singular manifolds of difference polynomials. Cohn Ri-

c h a r d M.), Ann. Math., 1953, **57**, № 3, 524—530 (англ.).

Автор указывает необходимое и достаточное условие того, чтобы нуль являлся существенно особым многообразием (Ritt J. F., Ann. Math., 1936, **37**, 552—617) разностного многочлена второго порядка с одним неизвестным. На примере разностного многочлена третьего порядка показана невозможность существования подобного признака, не зависящего от коэффициента разностного многочлена, в общем случае (для дифференциальных многочленов подобный признак существует, как показано в цитированной работе). *Я. Б. Лопатинский*

**5062. О комплексных корнях некоторого многочлена. Ш а р м а** (The complex zeros of a polynomial. S h a r m a A m b i k e s h w a r), Math. Student, 1953, **21**, № 1—2, 52—54 (англ.)

В работе указаны границы для модулей корней некоторых многочленов.

1. Модули корней функции

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+\alpha+m)^r}{(m+k)!}\, z^k$$

удовлетворяют неравенствам

$$(m+1)\left(\frac{\alpha+m}{\alpha+m+1}\right)^r \leqslant |z| \leqslant$$

$$\leqslant (m+n)\left(\frac{\alpha+m+n-1}{\alpha+m+n}\right)^r.$$

2. Для многочлена $f(z) = \sum_{k=0}^{n} P_{m+k}(r)\, z^k$, где коэффициенты $P_s(r)$ взяты из разложения

$$\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^r = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(r)\, x^n,$$

модули корней $f(z)$ содержатся в сегменте

$$\frac{P_m(r)}{P_{m+1}(r)} \leqslant |z| \leqslant \frac{P_{m+n-1}(r)}{P_{m+n}(r)}.$$

*П. Н. Реморов*

**5063. Верхние границы действительных корней полиномиальных уравнений. Г р и н с т е й н** (Upper limits to the real roots of polynomial equations. G r i n s t e i n L o u i s a S.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 9, 608—615 (англ.)

Приводится классификация известных методов отыскания верхней границы $s$ положительных корней многочлена с действительными коэффициентами и дается их сравнительный анализ (в отношении удобства применения в различных случаях и точности получаемых результатов).

Указываются некоторые неточности в работах Майерса, Корлисса и Мурга, посвященных этим вопросам. Так, автор показывает, что формула $s < (1 + g/a_p)^{1/(k-p)}$ ($k$ — индекс при первом отрицательном коэффициенте, $a_p$ — коэффициент при $(p+1)$-ом члене, $p < k$, $g$ — наибольшая из абсолютных величин отрицательных коэффициентов) верна лишь при $k > 1$, хотя по Майерсу (Myers R. J., Amer. Math. Monthly, 1933, **40**, 35—36) она имеет место при всех $k \geqslant 1$. *С. С. Калиновская*

**5064. Векторные пространства. Д ю б р е й** (Espaces vectoriels. D u b r e i l P a u l), Rev. math. spéc., 1953, **64**, № 5, 109—110; 1954, **64**, № 6, 133—135; № 7, 157 (франц.)

Элементарные хорошо известные факты, относящиеся к геометрии $n$-мерного аффинного пространства. *Г. Е. Шилов*

**5065. Об одном определителе. М и к у с и н с к и й** (Sur un déterminant. G.-M i k u s i ń s k i J.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, 25, 27—29 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Рассматривается обобщение определителя Вандермонда

$$\Delta\begin{pmatrix} w_1,\ldots, w_m \\ \alpha_1,\ldots, \alpha_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} w_1^0 \ldots (w_1^0)^{(\alpha_1-1)} \ldots w_m^0 \ldots (w_m^0)^{(\alpha_m-1)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ w_1^{n-1} \ldots (w_1^{n-1})^{(\alpha_1-1)} \ldots w_m^{n-1} \ldots (w_m^{n-1})^{(\alpha_m-1)} \end{vmatrix}$$

Индексы, взятые в скобки, указывают порядки соответствующих производных: $(w^i)^{(j)} = (i-1)\ldots$ $\ldots (i-j+1)\, w^{i-j}$, причем $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = n$.

Доказывается, что

$$\Delta\begin{pmatrix} w_1,\ldots, w_m \\ \alpha_1,\ldots, \alpha_m \end{pmatrix} =$$

$$= \prod_{\mu=1}^{m} (\alpha_\mu - 1)\,!! \prod_{1 \leqslant s < r \leqslant m} (w_r - w_s)^{\alpha_r \alpha_s},$$

где

$$0!! = 1 \quad k!! = 1!\, 2! \ldots k!.$$

*Д. М. Котелянский*

**5066. Пары матриц, обладающих свойством *L*. М о ц к и н, Т а у с к и** (Pairs of matrices with property *L*. M o t z k i n T. S., T a u s s k y O l g a), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 9, 961—963 (англ.)

В реферируемой работе продолжено исследование матриц, обладающих свойством $L$ (Motzkin T. S., Taussky Olga, Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **73**, 108—114; определение $L$-свойства см. РЖМат, 1953, 585).

Авторы рассматривают пучок $n \times n$ матриц $\lambda A + \mu B$ и говорят, что матрицы $A, B$ обладают свойством $D$, если дискриминант $\Delta$ уравнения $|\lambda A + B - \gamma I| = 0$, являющийся многочленом относительно $\lambda$, тождественно равен нулю или имеет корни четной кратности. Формулируется

следующая теорема: пусть пара матриц $A$, $B$ обладает свойством $D$, причем ни одна матрица пучка $\lambda A + \mu B$ (при $\lambda$, $\mu \neq 0$) не имеет более двух одинаковых корней. Тогда $A$, $B$ обладают свойством $L$. Далее отмечается, что если все матрицы пучка $\lambda A + \mu B$ подобны диагональным матрицам, то $A$, $B$ обладают свойством $L$, причем $AB = BA$.

В работе без доказательства излагаются лишь результаты исследований. *Н. В. Азбелев*

**5067. Обращение матриц Якоби. Берджер, Сейбл** (On the inversion of continuant matrices. Berger W. J., Saibel Edward), J. Franklin Inst., 1953, 256, № 3, 249—253 (англ.)

Рассматривается обращение матриц Якоби, т. е. матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c_n & a_n \end{pmatrix}.$$

Для элементов $G_{ij}$ обратной матрицы $G = A^{-1}$ даются явные выражения:

$$G_{11} = \frac{1}{k_1};\ G_{1j} = -\frac{b_{j-1}}{k_j} G_{1j-1},\ j>1;$$

$$G_{ij} = -\frac{c_i}{k_i} G_{i-1j},\ i > j;$$

$$G_{ii} = \frac{1}{k_i}[1 - c_i G_{i-1 i}],\ i > 1;$$

$$G_{ij} = \frac{1}{k_i}\left[\frac{G_{1j}}{G_{1i}} - c_i G_{i-1j}\right],\ i<j,$$

где $k_n = a_n$, $k_{n-1} = a_{n-1} - \frac{b_{n-1}c_n}{a_n}$, ..., $k_1 = a_1 - \frac{b_1 c_2}{k_2}$ (при этом предполагается, что $k_n = a_n \neq 0$). Утверждение авторов о том, что $A^{-1}$ не существует, если $k_j = 0$ хотя бы для одного $j$, неверно. Например, для

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ |A| = -1,\ k_2 = 0.$$

Вводится понятие угловой (gnomonic) симметрии 1-го и 2-го рода для матрицы. Угловая симметрия 1-го рода для матрицы определяется равенствами $G_{kj} = G_{kk} = G_{kj}$ при $j > k$. Даются условия, при которых угловая симметрия выполняется для обратной матрицы к матрице Якоби. *В. Н. Фаддеева*

## ГРУППЫ

**5068. Об одной проблеме Хопфа. Нёйман** (On a problem of Hopf. Neumann B. H.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 3, № 111, 351—353 (англ.)

Строятся две неизоморфные группы $G$ и $H$ с конечным (равным трем) числом образующих, каждая из которых является собственным гомоморфным образом другой. Группа $G$ имеет три образующие $a$, $b$, $c$, связанные двумя соотношениями

$$a^{-1}ba = b^2,\ bc = cb.$$

Группа $H$ получается из группы $G$ наложением дополнительного третьего соотношения

$$(ab^{-1}a^{-1}c^{-1}aba^{-1}c)^2 = 1$$

и, следовательно, является гомоморфным образом группы $G$. С другой стороны, соответствие

$$a \to a,\ b \to b^2,\ c \to c$$

порождает гомоморфное отображение группы $H$ на группу $G$. Наконец, группы $G$ и $H$ неизоморфны потому, что группа $G$ не имеет кручения (локально бесконечна, в терминологии автора), а группа $H$ имеет элементы второго порядка.

*М. М. Постников*

**5069. Свойства дополнимых разрешимых групп конечного порядка. Цакер** (Caratterizzazione dei gruppi risolubili d'ordine finito complementati. Zacher Giovanni), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1953, 22, № 1, 113—122 (итал.)

Группа $G$ называется дополнимой, если для любой подгруппы $H$ этой группы можно подобрать такую подгруппу $K$ (называемую дополнением подгруппы $H$ в $G$), что $H \cap K = 1$ и $H \cup K = G$. Если $K$ обязательно перестановочна с $H$, то $G$ называется дополнимой в смысле Холла.

Доказаны следующие теоремы:

I. Конечная разрешимая группа $G$ является дополнимой в том и только в том случае, если ее максимальный специальный нормальный делитель является прямым произведением минимальных нормальных делителей группы $G$ и имеет в $G$ дополнение, являющееся дополнимой группой.

Из этой теоремы следует, что дополнимая группа конечного порядка является дополнимой в смысле Холла в том и только в том случае, если она сверхразрешима (т. е. если у нее индексы главного ряда — простые числа).

II. Конечная группа $G$ является разрешимой дополнимой группой в том и только в том случае, если

1) $N_r = G$;

2) $N_i / N_{i-1}$ является произведением всех минимальных нормальных делителей группы $G / N_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, r$);

3) подгруппа Фраттини группы $G / N_{i-1}$ совпадает с единичным элементом этой группы.

Здесь под

$$N_0, N_1, N_2, \dots, N_r$$

подразумевается последовательность, в которой $N_0 = 1$, $N_i / N_{i-1}$ — максимальный специальный нормальный делитель группы $G / N_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, r$), $G / N_r$ имеет максимальным специальным нормальным делителем единичный элемент. *В. К. Туркин*

**5070. Некоторые замечания о полугруппах; все типы полугрупп порядка 2,3. Тамура** (Some

remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2,3. Tamura Takayuki), J. Gakugei Tokushima Univ., 1953, 3, 1—11 (англ.)

Доказано несколько результатов, касающихся расширений полугрупп, которые применены для определения всех полугрупп порядков два и три. *A. H. Clifford*

Перевод из Math. Rev., 1954, 15, № 1, 7.

**5071 Д. Полукоммутативные произведения групп. Фридман М. А.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ленингр. гос. пед. ин-т, Л., 1954

## ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

**5072. О псевдосходящихся последовательностях. Верхуфф** (On pseudo-convergent sequences. Verhoeff J.), Proc. Koninkl. nederl. acad. wetensch., 1953, A56, № 4, 401—404; Indagationes math., 1953, 15, № 4, 401—404 (англ.)

Пусть $K$ — неархимедовски нормированное поле; значение нормы элемента $a$ из $K$ обозначается через $|a|$. Последовательность $\{a_i\}$ элементов поля $K$ называется псевдосходящейся в следующих двух случаях: 1) либо для всех достаточно больших $i$ $a_i = a_{i+1}$, либо для всех достаточно больших $i$ $|a_{i+1} - a_i| < |a_i - a_{i-1}|$. Островский (Ostrovski A., Math. Z., 1934, 39, 269—404) доказал, что если $\{a_i\}$ — псевдосходящаяся последовательность элементов из $K$ и $f(x)$ — многочлен над $K$, то последовательность $\{f(a_i)\}$ также псевдосходящаяся. В своем доказательстве Островский рассматривал расширения поля $K$. Лонстра (Loonstra F., Proc. Koninkl. nederl. acad. wetensch., 1942, 45, 913—917; Indagationes math., 1942, 4, 269—230) предложил другое доказательство этой теоремы, в котором расширения поля $K$ не фигурируют. Автор показывает, однако, что рассуждения Лонстра неверны, в подтверждение чего приводится пример, противоречащий утверждению одной из лемм («теоремы 4») работы Лонстра. Далее автор дает свое доказательство указанной теоремы, не использующее расширений поля $K$. *В. Б. Демьянов*

**5073. О простых идеалах в кольце целых функций. Хенриксен** (On the prime ideals of the ring of entire functions. Henriksen Melvin), Pacif. J. Math., 1953, 3, № 4, 711—720 (англ.)

Пусть $R$ есть кольцо всех целых аналитических функций с обычными алгебраическими операциями (без топологии). Как показал Хельмер (Helmer O., Duke Math. J., 1940, 6, 345—356), для любых двух функций $f, g \in R$ без общих нулей можно определить $s, t \in R$ так, что $sf + tg = 1$; если же $f$ и $g$ имеют общие нули, то в аналогичном виде можно получить «общий наибольший делитель» — такую функцию $d = sf + tg$, что $f = f_1 d$, $g = g_1 d$. Отсюда вытекает, что всякий идеал $I \subset R$ с конечным базисом — главный. Для любого идеала $I \neq R$ можно определить не более чем счетное множество точек $A(I)$ так, что каждая функция $f \in I$ обращается в нуль на бесконечном подмножестве $A(I)$ или на всем $A(I)$. Идеал $I$ называется свободным (*free*), если множество общих нулей всех функций $f \in I$ пусто. Если $m(f)$ означает верхнюю грань кратностей корней функции $f \in R$ ($m(f) \leqslant \infty$), то критерием простоты идеала $I$ является равенство $m(f) = \infty$ для всех $f \in I$. Каждый свободный простой идеал содержится в одном единственном максимальном, который получается, например, присоединением к $I$ функции $f_0$, имеющей в каждой точке $A(I)$ нуль кратности 1. Описывается строение кольца вычетов по простому идеалу; в частности, если $I$ — наибольший простой идеал, содержащийся в данном максимальном идеале $M$ (в этом случае $I = \prod_{n=1}^{\infty} M^n$), то $R/I$ изоморфно кольцу всех формальных степенных рядов. *Г. Е. Шилов*

**5074. Заметка об обратных элементах в кольцах Осима** (Note on inverses in rings. Osima Masaru), J. Gakugei Tokushima Univ., 1953, 3, 21—23 (англ.)

Автор доказывает некоторые результаты о кольцах, обладающих элементами с правыми обратными, но без левых обратных. Из этих результатов наиболее интересен один, который, однако, уже известен (Jacobson, Proc. Amer. Math. Soc., 1950, 1, 352—355). *I. N. Herstein*

Перевод из Math. Rev., 1953, 14, № 11, 1056.

**5075. К определению алгебр Клиффорда. Торнхейм** (On the definition of Clifford algebras. Tornheim Leonard), Michigan Math. J., 1952, 1, № 2, 194—197 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Доказано, что алгебру Клиффорда можно определить некоторым внутренним инвариантным образом, т. е. не фиксируя базис. *М. М Постников*

---

**См. также:** 5037 **РЕЦ**, 5045, 5082, 5083, 5086, 5172, 5174, 5225, 5242, 5249, 5250, 5254, 5262, 5285

## ТОПОЛОГИЯ

**5076. Характеристическая теорема для монотонных отображений. Флойд, Форт** (A characterization theorem for monotone mappings. Floyd E. E., Fort M. K., Jr), Proc. Amer. Math. Soc, 1953, 4, № 5, 828—830 (англ.)

Пусть $S$ — двумерная сфера в трехмерном пространстве и $Q$ — ограниченный ею открытый шар. Используя свои предыдущие иссследования (Floyd E. E., Duke Math. J., 1946, 16, 225—235; Fort M. K. Proc. Amer. Math. Soc., 1950, 1, 59—62) и работ Юнга (Ann. Math. 1944, 45, 753—783), авторы доказывают, что непрерывное отображение $f$ сферы $S$ на себя монотонно тогда и только тогда, когда существует непрерывное продолжение $g$: $\overline{Q} \to \overline{Q}$ отображения $f$, гомеоморфное на $Q$. Доказательство основано на изучении свойств пространства $H(S)$ всех

гомеоморфизмов сферы $S$ на себя и пространства $M(S)$ всех монотонных отображений сферы $S$ на себя. В частности, показывается, что $H(S)$ и $M(S)$ равномерно локально линейно связны.

*Л. Д. Кудрявцев*

**5077. Об устойчивых и неустойчивых точках. Борсук, Яворовский** (On labil and stabil points. Borsuk K., Jaworowski J. W.), Fundam. math., 1952, **39**, 159—175 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Работа посвящена изучению свойств устойчивости и гомотопической устойчивости точек в метрических пространствах. Точка $a$ называется гомотопически неустойчивой в $M$, если для любой окрестности $U(a) \subset M$ существует такая непрерывная деформация множества $M$, тождественная вне $U(a)$, которая освобождает точку $a$. Прочие точки называются гомотопически устойчивыми в $M$.

Понятие гомотопической устойчивости введено Хопфом под названием просто «устойчивости». В этой работе термин «устойчивость» имеет другой смысл. Именно, точка $a \in M$ неустойчива в $M$, если при любом $\varepsilon > 0$ найдется $\varepsilon$-сдвиг множества $M$ в себя, освобождающий точку $a$. Прочие точки называются устойчивыми в $M$. Очевидно, что устойчивые в $M$ точки гомотопически устойчивы в $M$. Если точка $(a, b)$ топологического произведения $A \times B$ устойчива (гомотопически устойчива) в $A \times B$, то точки $a$ и $b$ устойчивы (гомотопически устойчивы) в $A$ и $B$ соответственно. Обратный вопрос в общем виде остается открытым, однако в том частном случае, когда гомотопическая устойчивость есть следствие гомологических свойств множеств, в работе дается положительное решение проблемы (для гомотопической устойчивости). Именно, если точка $a$ компакта $A$ зацеплена в $A$ с его подкомпактом $A_0$, то $a$ гомотопически устойчива в $A$ (точка $a \in A \setminus A_0$ зацеплена с компактом $A_0 \subset A$ в некоторой размерности $m$, если в $A_0$ существует $(m-1)$-мерный истинный цикл, гомологичный нулю в $A$, но не гомологичный нулю ни в каком компакте $\Phi \subset A \setminus a$); если точка $a$ компакта $A$ зацеплена в $A$ с его подкомпактом $A_0$, а точка $b$ компакта $B$ зацеплена в $B$ с его подкомпактом $B_0$, то точка $(a, b) \in A \times B$ зацеплена в $A \times B$ с его подкомпактом $A_0 \times B \cup A \times B_0$.

Из других результатов наиболее существенны следующие две теоремы. Пусть $M$ — $n$-мерное пространство, $A$ и $A_0$ — его подкомпакты, $A_0 \subset A$ и $a \in A \setminus A_0$. Если $A_0$ зацеплено с $a$ в размерности $n$, то $a$ гомотопически устойчива в $M$. Если $A$ — цикличное в размерности $n$ подмножество $n$-мерного пространства $M$, а $f_t$ непрерывная деформация тождественного отображения $f_0$ множества $A$ в $M$, то $A \subset f_1(A)$ (компакт $A$ цикличен в размерности $n$, если на нем найдется истинный $n$-мерный цикл, не гомологичный в $A$ никакому истинному циклу, носитель которого был бы собственным замкнутым подмножеством компакта $A$). В качестве простых следствий из этих теорем получаются различные (весьма частные) достаточные условия гомотопической устойчивости, например: если в $n$-мерном пространстве $M$ содержится $n$-мерный куб $Q$, то всякая внутренняя точка куба $Q$ гомотопически устойчива в $M$; в $n$-мерном пространстве $M$ всякая точка, принадлежащая его цикличному в размерности $n$ подмножеству, гомотопически устойчива в $M$, и т. п. *А. Л. Лунц*

**5078. К вопросу о делении многообразий. Борсук К.**, Бюлл. Польской Акад. наук, отд. 3, 1953, 1, № 3-4, 87—90

В статье доказывается, что если пространство $Z$ гомеоморфно топологическому произведению $X \times Y$, причем $Z$ — локально связный континуум размерности $n+1$, а $Y$ — $n$-мерное многообразие (замкнутое или с границей), то заданием пространств $Y$ и $Z$ пространство $X$ определяется однозначно. Подробное изложение было уже опубликовано автором (см. РЖМат, 1954, 4368). *А. С. Пархоменко*

**5079. Геометрическое применение теоремы Брауэра о неподвижных точках. Куратовский К., Штейнхаус Г.** (в подлиннике Штейнгауз Г.), Бюлл. Польской Акад. наук, отд. 3, 1953, 1, № 3-4, 79—82

В работе доказана следующая теорема (отдельно сформулированная вначале для случая $n=2$). Пусть $S$ — $n$-мерный симплекс, расположенный в $n$-мерном евклидовом пространстве $E$, 0 — его внутренняя точка, а $F_0, F_1, \ldots, F_n$ — все его $(n-1)$-мерные грани. Обозначим через $A_i$ множество точек, лежащих на лучах, которые исходят из точки 0 и пересекают грань $F_i$. Пусть, далее, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — неотрицательные числа, сумма которых равна единице, а $R \subset E$ — измеримое множество, мера ($n$-мерная) которого равна единице. Тогда существует такой параллельный перенос $p$ в $E$, что мера множества $A_i \cap pR$ равна $a_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. При доказательстве этой теоремы применяется следующая топологическая лемма (вытекающая, например, из формулы Лефшеца для неподвижных точек). Пусть $S$ — симплекс, $\dot{S}$ — его граница, а $f$ — непрерывное отображение симплекса $S$ в себя, удовлетворяющее условию $f(\dot{S}) \subset \dot{S}$ и не имеющее неподвижных точек на границе $\dot{S}$ симплекса $S$. Тогда $f(S) = S$, т. е. каждая точка симплекса $S$ является образом при отображении $f$. *В. Г. Болтянский*

**5080. Понятие диаметра и равномерные и топологические пространства. Гомес** (La fonction diamètre et les structures uniforme et topologique. Gomes A. Pereira), Portug. Math., 1953, **12**, 73—85 (франц.)

Псевдодиаметром называется такая функция $d$, что: (0) из $x \subset y$ следует $d(x) \leqslant d(y)$; (1) для любого $a \neq 0$ существует такое $b \neq 0$, что если $x$ и $y$ пересекаются и $d(x) \leqslant b$, $d(y) \leqslant b$, то $d(x \cup y) \leqslant a$; (2) если $z$ — объединение семейства $\{x, y, \ldots\}$ и $d(x \cup y) \leqslant a$ для всех пар элементов этого семейства, то $d(z) \leqslant a$. Здесь предполагается, что функция $d$ определена на некоторой структуре и принимает значения в некотором частично упорядоченном множестве, имеющем наименьший элемент 0. Показано, что понятия равномерного пространства, метрики и т. д. могут быть определены в терминах псевдодиаметра. *R. Arens*

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 892.

**5081. Структура $k$-хроматических графов. Дирак** (The structure of $k$-chromatic graphs. Dirac G. A.), Fundam. math., 1953, **40**, 42—55 (англ.)

Граф Г называется $k$-хроматическим, если $k$ есть наименьшее целое число, обладающее следующим

свойством: на вершинах $a_i$ графа Г можно определить целочисленную функцию $f(a_i)$, принимающую значения $1, 2, \ldots k$ и такую, что $f(a_i) \neq f(a_j)$, если в графе Г существует ребро, соединяющее вершины $a_i$ и $a_j$. Граф Г называется полным $k$-графом, если число его вершин равно $k$ и любые две различные вершины соединены ребром (все рассматриваемые графы по предположению не имеют петель). Существует гипотеза, согласно которой всякий $k$-хроматический граф содержит в качестве подграфа полный $k$-граф. (В случае $k=5$ это связано с проблемой четырех красок.) В статье изучаются некоторые вопросы строения $k$-хроматических графов, возникшие у автора при исследовании указанной гипотезы. В основном рассматриваются структурные свойства так называемых критических $k$-хроматических графов, т. е. таких, которые не содержат собственных $k$-хроматических подграфов. Специально устанавливаются некоторые свойства контуров и хорд у 6-хроматических графов. Полные формулировки не приводятся ввиду их сложности.

*Л. Д. Кудрявцев*

**5082. Концы однородных пространств групп Ли.** Борель (Les bouts des espaces homogènes de groupes de Lie. Borel Armand), Ann. Math., 1953, 58, № 3, 443—557 (франц.)

Доказывается, что однородное пространство $G/H$ связной, локально связной, локально компактной метризуемой группы $G$ (например, связной группы Ли) по ее связной подгруппе $H$ имеет не более двух концов в смысле Фрёйденталя. (См. Freudenthal H. Math. Z. 1931, **33** 692—713.) Это предложение непосредственно следует из теоремы Шпекера (см. Wang H. C., Duke Math. J., 1952, **19**, 303—309), заключающейся в том, что число концов локально связного, локально компактного метрического пространства $X$ превышает на единицу ранг естественного отображения целочисленной одномерной группы $\nabla$-гомологий $H_c^1(X)$ с компактными носителями (в смысле Александера — Спаньера) в соответствующую группу $\nabla$-гомологий $H^1(X)$ с произвольными носителями. Связь между теоремой Шпекера и доказываемым предложением устанавливается следующей общей теоремой: для любого $i$ группа $H_c^i(G/H)$ изоморфна группе $H^{i-s+t}(K/L)$, где $K$ — максимальная компактная подгруппа группы $G$, $L$ — максимальная компактная подгруппа группы $H$ (причем предполагается, что $L \subset K$), $s$—размерность пространства $G/K$, являющегося согласно известной теореме Ивасавы евклидовым пространством, а $t$ — размерность пространства $H/L$. Кроме того, оказывается, что $s \geqslant t$, причем, если $s=t$, то $G/H$ гомеоморфно $K/L$ и, следовательно, компактно, а если $s > t+1$, то $G/H$ имеет только один конец. Таким образом, точное число концов остается неизвестным только в случае $s=t+1$. Однако если $G$ есть группа Ли, то пространство $G/H$ в случае связной группы $H$ гомеоморфно произведению $(K/L)\times R$, где $R$ — евклидова прямая, и потому имеет точно два конца. Последнее утверждение является частным случаем следующего общего предложения. Пусть $M$ — открытое (т. е. некомпактное) связное дифференцируемое $n$-мерное многообразие, в котором дифференцируемым образом действует связная компактная группа Ли $K$, причем соответствующая стационарная подгруппа связна, а траектория $K(x)$ любой точки $x \in M$ является $(n-1)$-мерным подмногообразием, регулярно вложенным в $M$. Тогда все траектории $K(x)$ гомеоморфны между собой и определяют тривиальное расслоение $K(x)\times R$ многообразия $M$.

Из изоморфизма $H_c^i(G/H) \approx H^{i-s+t}(K/L)$ и того факта, что $K/L$ является многообразием (здесь мы считаем группу $G$ группой Ли) следует, что, если пространство $G/H$ гомеоморфно евклидову пространству, то $K=L$, т. е. $H \supset K$. Верно ли обратное утверждение,— неизвестно. Можно лишь утверждать, что, если $K=L$, то пространство $G/H$ стягиваемо в точку, а произведение $G/H \times R^t$ дифференцируемым образом гомеоморфно пространству $R^s$.

Во всем предыдущем группа $H$ предполагалась связной. Это условие существенно. Оказывается, что фактор-пространства групп Ли по несвязным подгруппам могут иметь произвольное (даже бесконечное) число концов. Например, фактор-пространством группы всех сохраняющих ориентацию конформных преобразований единичного круга является многообразие линейных элементов любой поверхности Римана гиперболического типа, число концов которого равно числу концов соответствующей поверхности Римана.

Полученные результаты автор применяет к исследованию $m$-однородных пространств. (Многообразие $M$ называется $m$-однородным пространством группы Ли $G$, если $G$ есть группа преобразований многообразия $M$, причем любые $m$ различных точек многообразия $M$ можно преобразованием из $G$ перевести в любые $m$ различных точек.) Оказывается, что односвязных 4-однородных пространств не существует. Единственными 3-однородными односвязными пространствами являются сферы. Любое 2-однородное пространство гомеоморфно либо евклидову пространству (если оно некомпактно), либо (если оно компактно) некоторой сфере, или проективному пространству (комплексному или кватернионному), или, наконец, проективной плоскости над алгеброй чисел Кэли.

*М. М. Постников*

**5083. Гомологии и $\nabla$-гомологии связных компактных групп Ли.** Борель (Homology and cohomology of compact connected Lie groups. Borel Armand), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 11, 1142—1146 (англ.)

Реферируемая статья состоит из пяти пунктов. В первом рассматривается алгебра Понтрягина $H_*(G)$ и алгебра $\nabla$-гомологий $H^*(G)$ (над некоторым полем) произвольной связной компактной группы Ли $G$. Система элементов $\{x_i\}$ некоторой ассоциативной алгебры с единицей, где индекс $i$ пробегает некоторое вполне упорядоченное множество, называется простой, если все произведения вида

$$x_{i_1} \ldots x_{i_k} \quad (i_1 < i_2 < \cdots < i_k;\ k = 1, 2 \ldots)$$

и единица образуют базу алгебры. Элемент $x \in H^*(G)$ называется примитивным, если его образ в алгебре $H^*(G\times G) = H^*(G) \otimes H^*(G)$ при гомоморфизме, порожденном естественным отображением $G\times G \to G$, имеет вид $x \otimes 1 + 1 \otimes x$. В предположении, что алгебра $H^*(G)$ обладает простой системой образующих, состоящей из при-

митивных элементов, утверждается, что алгебра Понтрягина $H_*(G)$ является антикоммутативной внешней алгеброй, число образующих элементов которой равно числу элементов данной простой системы образующих алгебры $H^*(G)$, причем степени соответствующих элементов совпадают (отсюда, в частности, вытекают результаты Миллера (РЖМат, 1953, 135) о строении алгебр Понтрягина классических групп). При тех же предположениях утверждается, что для любого пространства $Y$, в котором группа $G$ определена как группа преобразований, и для любого непрерывного отображения $f: G \to Y$, перестановочного с операторами из $G$, образ алгебры $H^*(Y)$ при гомоморфизме $f^*$ совпадает с подалгеброй, порожденной примитивными элементами, а если характеристика поля коэффициентов отлична от двух, то $H^*(Y) = N \otimes P$, причем гомоморфизм $f^*$ на подалгебре $N$ тривиален, а на подалгебре $P$ является изоморфизмом (частные случаи этой теоремы ранее рассматривались Лере, автором и Самельсоном).

Результаты этого пункта имеют место и для случая, когда $G$ есть не группа Ли, а лишь $H$-пространство в смысле Серра (т. е. топологическое пространство с непрерывным умножением, обладающее гомотопической единицей), а если $G$ и $Y$ не имеют кручений, то и для гомологий над кольцом целых чисел.

Во втором пункте сформулированы некоторые соотношения между алгебрами $\nabla$-гомологий групп Ли и их классифицирующих пространств. Эти соотношения можно рассматривать как обращения соответствующих соотношений, указанных автором ранее (см. РЖМат, 1953, 127).

В третьем пункте вычислены алгебры $\nabla$-гомологий (над простыми полями ненулевой характеристики) фактор-пространств классических групп по циклическим подгруппам центра.

В четвертом пункте изучается спинорная группа $\mathrm{Spin}(n)$. Утверждается, что кручение эта группа имеет только при $n \geqslant 7$, причем все коэффициенты кручения равны двум. Полностью описана ее алгебра $\nabla$-гомологий по модулю два. Оказывается, что эта алгебра имеет простую систему образующих $u_0, u_1, \ldots, u_k$, где $k = n - [\log_2 n]$, $\dim u_0 = 2^{[\log_2 n]} - 1$, а последовательность $\dim u_1, \ldots, \dim u_k$ получается из последовательности $3, 4, \ldots, n-1$ выбрасыванием всех степеней двух, причем эти образующие связаны соотношениями:

$$Sq^i u_j = \binom{\dim u_j}{i} u_k,$$

если $j > 0$, $i \leqslant \dim u_j$, $i + \dim u_j = \dim u_k$, и $Sq^i u_j = 0$ во всех остальных случаях (в частности, $u_0 u_0 = 0$). Элементы $u_j$ для $j > 0$ универсально трансгрессивны, а элемент $u_0$ трансгрессивен только для $n \leqslant 9$. Отсюда следует, что для $n \geqslant 10$ алгебра $\nabla$-гомологий классифицирующего пространства спинорной группы не является кольцом многочленов, а алгебра Понтрягина спинорной группы не антикоммутативна (т. е. в нашем случае не коммутативна). Эти алгебры вычислены для $n = 10$; для бо́льших $n$ вопрос остается открытым.

В пятом пункте вычислены алгебры $\nabla$-гомологий над кольцом целых чисел и полем вычетов по модулю два двух особых групп $G_2$ и $F_4$.

*М. М. Постников*

**084. О гомотопических группах букетов сфер. I.** Чжан Су-чэн (論 $S^p \cup S^q$ 的同倫羣 I. 張素誠), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, 3, № 3, 186—189 (кит.; резюме англ.)

Доказано, что при $p > q \geqslant 2$, $r \leqslant 2(p+q) - 4$ имеет место разложение

$$\pi_r(S^p \cup S^q) = \pi_r(S^p) + \pi_r(S^q) + \pi_{r+1}(S^{p+q}) + \pi_{r+2}(S^{2p+q}) + \sum_{i=2}^{\infty} \pi_{r+i}(S^{p+iq}).$$

Для $p = q$ эта формула была доказана Хилтоном (Hilton P. J., Proc. London Math. Soc. 1951, 3, 462—493). *М. М. Постников*

**5085. О гомотопических группах букетов сфер. II.** Чжан Су-чэн (論 $S^p \cup S^q$ 的同倫羣 II. 張素誠), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, 3, 190—199 (кит.; резюме англ.)

Вычислены группы $\pi_5(S^2 \cup S^2)$ и $\pi_{13}(S^p \cup S^q)$ при $p + q = 8$. Вычисление основано на некоторых общих построениях, связанных с произведением Уайтхеда. *М. М. Постников*

**5086. Гомотопические группы и классы абелевых групп.** Серр (Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. Serre Jean-Pierre), Ann. Math., 1953, 58, № 2, 258—294 (франц).

Статья состоит из пяти глав. Первая, чисто алгебраическая, посвящена изучению классов абелевых групп. Классом абелевых групп автор называет непустую совокупность $\mathscr{C}$ абелевых групп, содержащую вместе с некоторой группой любую группу, изоморфную любой ее подгруппе или фактор-группе, а вместе с некоторыми двумя группами — любое расширение одной группы при помощи другой.

Понятие класса сужается посредством наложения некоторых из следующих аксиом.

Аксиома $\mathrm{II}_A$. Если $A \in \mathscr{C}$ и $B \in \mathscr{C}$, то $A \otimes B \in \mathscr{C}$ и $A * B \in \mathscr{C}$ (здесь $A \otimes B$ есть тензорное произведение групп $A$ и $B$, а $A * B$ — их произведение кручения, т. е. ядро гомоморфизма $A \otimes B \to A \otimes L$, порожденного включением $R \subset L$, где $L$ — некоторая свободная группа, а $R$ — ядро естественной проекции $L \to B$). Этой аксиоме удовлетворяют: 1) класс групп конечного типа (т. е. групп с конечным числом образующих); 2) класс групп мощности, не превосходящей данного бесконечного кардинального числа («алефа»); 3) класс конечных групп; 4) класс конечных групп, порядки которых делятся только на данные простые числа; 5) класс групп с условием максимальности для подгрупп (т. е. групп, изоморфных прямым суммам конечных групп и групп типа $p^\infty$).

Аксиома $\mathrm{II}_B$. Если $A \in \mathscr{C}$, то $A \otimes B \in \mathscr{C}$ для любой группы $B$.

Аксиома IV. Прямая сумма (равносильная аксиома получится, если вместо прямой суммы рассматривается индуктивный предел) групп класса $\mathscr{C}$ принадлежит $\mathscr{C}$. Из аксиомы IV следует аксиома $\mathrm{II}_B$, а из аксиомы $\mathrm{II}_B$ — аксиома $\mathrm{II}_A$. Кроме того, из аксиомы IV вытекает следующая

Аксиома III. Если $A \in \mathscr{C}$, то $H_i(A) \in \mathscr{C}$ (здесь $H_i(A)$ есть целочисленная группа гомологий

группы $A$ в смысле Хопфа (Hopf H., Comm. Math. Helv., 1944, 17, 39—79)). Всем указанным аксиомам удовлетворяют следующие классы групп: 1) класс тривиальных групп; 2) класс периодических групп (групп, не содержащих свободных элементов); 3) класс периодических групп, порядки элементов которых взаимно просты с данным числом. Класс периодических групп с ограниченными в совокупности порядками элементов удовлетворяет аксиомам $II_B$ и III, но не удовлетворяет аксиоме IV. Классы, не удовлетворяющие аксиоме III или аксиоме $II_A$, неизвестны.

Пусть $\mathscr{C}$ — некоторый класс групп. Любая группа этого класса называется $\mathscr{C}$-тривиальной. Гомоморфизм $f: A \to B$ называется $\mathscr{C}$-инъективным ($\mathscr{C}$-взаимно однозначным), если его ядро $\mathscr{C}$-тривиально, и $\mathscr{C}$-проективным ($\mathscr{C}$-на), если $\mathscr{C}$-тривиально его коядро (коядром гомоморфизма $f$ называется фактор-группа $B/fA$). Гомоморфизм, являющийся одновременно $\mathscr{C}$-проективным и $\mathscr{C}$-инъективным, называется $\mathscr{C}$-изоморфизмом. Две группы $A$ и $B$ называются $\mathscr{C}$-изоморфными, если для некоторой группы $L$ существуют $\mathscr{C}$-изоморфизмы $L \to A$ и $L \to B$. Введенные «$\mathscr{C}$-понятия» обладают всеми формальными свойствами обычных теоретико-групповых понятий (получающихся, когда класс $\mathscr{C}$ есть класс тривиальных групп).

Вторая глава посвящена изучению относительных расслоенных пространств (т. е. расслоенных пространств $E$, в которых отмечено подмножество $E'$, являющееся полным прообразом при проекции $p$ некоторого подпространства $B'$ базы $B$). Для таких расслоенных пространств определяется спектральная последовательность, второй член которой оказывается изоморфным группе гомологий базы $B$ относительно пространства $B'$ над группой гомологий слоя $F$ (для случая, когда $B'$ — пустое множество, это — известная теорема Лере, см., например, РЖМат, 1953, 127). Доказывается следующая теорема.

Если класс $\mathscr{C}$ удовлетворяет аксиоме $II_B$ и для некоторых $p$ и $q$ группы $H_i(B, B')$ и $H_j(F)$, где $0 \leqslant i < p$, $0 < j < q$, являются $\mathscr{C}$-тривиальными группами, то гомоморфизм $p_*: H_i(E, E') \to H_i(B, B')$, порожденный проекцией $p$ расслоенного пространства, $\mathscr{C}$-инъективен для $i \leqslant p+q-1$ и $\mathscr{C}$-проективен для $i \leqslant p+q$. Если класс $\mathscr{C}$ удовлетворяет только аксиоме $II_A$, то теорема остается справедливой при замене числа $p+q$ числом $\min(p, q+1)$ и при дополнительном предположении, что $H_1(B, B') = 0$.

Для случая, когда класс $\mathscr{C}$ есть класс тривиальных групп, эта теорема была ранее доказана автором (Ann. Math., 1951, 54, 425—505). Из сформулированной теоремы следует, что если класс $\mathscr{C}$ удовлетворяет аксиоме $II_A$, пространство $E$ во всех размерностях $\mathscr{C}$-ациклично (т. е. $H_i(E) \in \mathscr{C}$ для всех $i > 0$), а $B$ является $\mathscr{C}$-ацикличным в размерностях $< p$, то $F$ $\mathscr{C}$-ациклично в размерностях $< p-1$, а группа $H_{p-1}(F)$ $\mathscr{C}$-изоморфна группе $H_p(B)$. Если же класс $\mathscr{C}$ удовлетворяет аксиоме $II_B$, то для любого $i$, удовлетворяющего условию $0 < i < 2p-2$, группа $H_i(F)$ $\mathscr{C}$-изоморфна группе $H_{i+1}(B)$. В частности, если два из пространств $E$, $B$, $F$ ацикличны во всех размерностях (класс $\mathscr{C}$ удовлетворяет аксиоме $II_A$), то третье пространство также ациклично (например, пространство замкнутых путей линейно связного и односвязного пространства тогда и только тогда $\mathscr{C}$-ациклично, когда само пространство $\mathscr{C}$-ациклично). Далее, если база $B$ $\mathscr{C}$-ациклична, то естественный гомоморфизм $H_i(F) \to H_i(E)$ для всех $i$ является $\mathscr{C}$-изоморфизмом (для класса тривиальных групп эта теорема была доказана Фельдбау). Если же слой $F$ $\mathscr{C}$-ацикличен, то гомоморфизм $H_i(E) \to H_i(B)$ для любого $i$ является $\mathscr{C}$-изоморфизмом (для класса тривиальных групп эта теорема была доказана Виеторисом). Последние два утверждения верны, если класс $\mathscr{C}$ удовлетворяет аксиоме $II_B$; для классов, удовлетворяющих только аксиоме $II_A$, они неверны. Наконец, если класс $\mathscr{C}$ удовлетворяет аксиомам $II_A$ и III, то для любой $\mathscr{C}$-тривиальной группы $A$ и любого $n$ пространство $K(A, n)$ $\mathscr{C}$-ациклично. (Эта теорема может быть обобщена на любые натуральные системы. *Прим. реф.)*

Третья глава содержит обобщения теорем Гуревича и Уайтхеда.

Теорема Гуревича. Пусть класс $\mathscr{C}$ удовлетворяет аксиомам $II_A$ и III. Если $X$ — такое линейно связное и односвязное пространство, что для некоторого $n$ все группы $\pi_i(X)$, $i < n$, $\mathscr{C}$-тривиальны, то пространство $X$ $\mathscr{C}$-ациклично в размерностях, меньших $n$, и естественное отображение $\pi_n(X) \to H_n(X)$ является $\mathscr{C}$-изоморфизмом.

Если, кроме того, класс $\mathscr{C}$ удовлетворяет аксиоме $II_B$, то аналогичная теорема имеет место и для относительных групп.

Теорема Уайтхеда. Пусть класс $\mathscr{C}$ удовлетворяет аксиомам $II_B$ и III. Если $A$ и $B$ — линейно связные и односвязные пространства, а $f: A \to B$ — непрерывное отображение, отображающее группу $\pi_2(A)$ на группу $\pi_2(B)$, то следующие условия равносильны: (*a*) гомоморфизм $f: H_i(A) \to H_i(B)$ $\mathscr{C}$-инъективен для $i < n$ и $\mathscr{C}$-проективен для $i \leqslant n$; (*b*) гомоморфизм $f_*: \pi_i(A) \to \pi_i(B)$ $\mathscr{C}$-инъективен для $i < n$ и $\mathscr{C}$-проективен для $i \leqslant n$;

Указаны также некоторые уточнения этой теоремы. (Обобщенные теоремы Гуревича и Уайтхеда непосредственно следуют из теорем теории натуральных систем с помощью упомянутого выше обобщения предложения о $\mathscr{C}$-ацикличности пространства $K(A, n)$. *Прим. реф.)*

В четвертой главе рассматриваются гомотопические группы сфер. С помощью теорем предыдущих двух глав получено много новых свойств этих групп. Сформулируем здесь только следующее предложение, доказанное также Муром (см. реф. 5087). Пусть $n \geqslant 3$ — нечетное число, $p$ — простое нечетное. Тогда примарная по $p$ компонента группы $\pi_i(S^n)$ тривиальна, если $i < n+4p-6$ и $i \neq n+2p-3$, и циклична, если $i = n+2p-3$. Кроме того, примарные по $p$ компоненты групп $\pi_{4p-3}(S^3)$ и $\pi_{4p-2}(S^3)$ цикличны. Глава пятая содержит некоторые дополнительные результаты, касающиеся преимущественно групп Ли. *М. М. Постников*

**5087. Некоторые приложения теории гомологий к гомотопическим задачам. Мур** (Some applications of homology theory to homotopy problems.

Moore John C.), Ann. Math., 1953, 59, № 2, 325—350 (англ.)

Автор обобщает на относительные расслоенные пространства определение спектральной последовательности и доказывает основные ее свойства, известные для абсолютного случая. Аналогичные рассмотрения были произведены Серром (см. реф. 5086). Используя понятие пространства, уничтожающего гомотопические группы (РЖМат, 1954, 3271), которое автор называет $n$-связным расслоенным пространством над данным пространством, автор доказывает теорему Гуревича для относительных групп, одновременно несколько обобщая ее алгебраическое содержание (аналогичные, существенно более общие результаты получены также Серром (см. реф. 5086)). Кроме того, некоторые теоремы типа теоремы Гуревича получены также и для триад. Применяя эти общие теоремы, автор вычисляет группы гомологий некоторых пространств путей и получает новые сведения о гомотопических группах сфер и других пространств. Эти последние результаты несколько шире соответствующих результатов Серра (см. реф. 5086). *М. М. Постников*

**5088. Произведения в теории гомотопий. Блейкерс, Масси** (Products in homotopy theory. Blakers A. L., Massey W. S.), Ann. Math., 1953, 58, № 2, 295—324 (англ.)

$n$-Местной гомотопической конструкцией от размерностей $p_1, \ldots, p_n$ к размерности $q$ называется функция $T$, которая для произвольного пространства $X$ относит любым элементам $\alpha_i \in \pi_{p_i}(X)$, $i = 1, \ldots, n$, некоторый элемент $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \pi_q(X)$ и которая натуральна в том смысле, что для любого непрерывного отображения $f: X \to Y$ имеет место равенство

$$f_* T(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = T(f_*\alpha_1, \ldots, f_*\alpha_n).$$

Легко видеть, что $n$-местные гомотопические конструкции находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы $\pi_q(K)$, где $K$ есть букет сфер $S_1, \ldots, S_n$ размерностей $p_1, \ldots, p_n$. Тождественное отображение сферы $S_i$ в $K$ определяет элемент $\iota_i \in \pi_{p_i}(K)$. Две конструкции $T$ и $T'$ совпадают тогда и только тогда, когда $T(\iota_1, \ldots, \iota_n) = T'(\iota_1, \ldots, \iota_n)$. В связи с этим пространство $K$ и элементы $\iota_1, \ldots, \iota_n$ называются универсальным примером для $n$-местных конструкций от размерностей $p_1, \ldots, p_n$. Аналогичные определения можно дать гомотопическим конструкциям для относительных групп, а также и для «смешанных» конструкций. Для любых таких конструкций существуют соответствующие универсальные примеры. Аналогичные конструкции для групп гомологий рассматривал Серр (РЖМат, 1954, 3271).

В качестве примера двуместной «смешанной» гомотопической конструкции авторы, обобщая известное построение Уайтхеда (Whitehead J. H. C., Ann. Math., 1941, 42, 409—429), определяют функцию $[\alpha, \beta] \in \pi_{p+q-1}(X, A)$, где $\alpha \in \pi_p(A)$, $\beta \in \pi_q(X, A)$ ($X$ — пространство, $A$ — его подпространство). Функцию $[\alpha, \beta]$ авторы называют произведением Уайтхеда и доказывают следующие ее свойства: 1) $[\alpha, \beta] = (-1)^{pq}[\beta, \alpha]$; 2) если $f: (X, A) \to (Y, B)$, то $f_*[\alpha, \beta] = [f_*\alpha, f_*\beta]$ (натуральность); 3) если $\partial: \pi_n(X, A) \to \pi_{n-1}(A)$ — граничный оператор, то $\partial[\alpha, \beta] = (-1)^{p-1}[\alpha, \partial\beta]$ (справа стоит первоначальное произведение Уайтхеда); 4) если $p > 1$, то $[\alpha_1 + \alpha_2, \beta] = [\alpha_1, \beta] + [\alpha_2, \beta]$; 5) если $q > 2$, то $[\alpha, \beta_1 + \beta_2] = [\alpha, \beta_1] + [\alpha, \beta_2]$; если же $q = 2$, то $[\alpha, \beta_1 + \beta_2] = [\alpha, \beta_1] + (\partial\beta_1)[\alpha, \beta_2]$; 6) если $p = 1$, то $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta$; 7) если $\omega$ — изоморфизм гомотопических групп в различных точках, порожденный некоторым путем, то $\omega[\alpha, \beta] = [\omega\alpha, \omega\beta]$; 8) если $i: \pi_m(A) \to \pi_m(X)$, $j: \pi_n(X) \to \pi_n(X, A)$ — естественные гомоморфизмы вложения, то $j[i\alpha, \beta] = [\alpha, j\beta]$; 10) если $\langle\alpha, \beta\rangle \in \pi_{p+q-2}(X, A)$, $\alpha \in \pi_p(X, A)$, $\beta \in \pi_q(X, A)$ — произведение Ху (Hu Sze-tsen, J. London Math. Soc., 1947, 22, 61—67), то $\langle\alpha, \beta\rangle = -[\alpha, \partial\beta]$.

Авторы строят также другое обобщение произведения Уайтхеда, рассматривая в произвольном пространстве $X$ два подпространства $A$ и $B$ с непустым пересечением (так называемую триаду) и определяя произведение $[\alpha, \beta]$ элементов $\alpha \in \pi_p(B, A \cap B)$ и $\beta \in \pi_q(A, A \cap B)$, принадлежащее группе $\pi_{p+q-1}(X, A, B)$ — гомотопической группе триады $(X, A, B)$ (о группах триад см. Blakers A. L., Massey W. S., Ann. Math., 1951, 53, 161—205; 1952, 55, 192—201). Это произведение обладает свойствами, аналогичными свойствам первого обобщения произведения Уайтхеда.

Кроме того, авторы определяют третье произведение $\alpha \bigstar \beta \in \pi_{p+q}(X \times Y, X \times B \cup A \times Y)$, где $\alpha \in \pi_p(X, A)$, $\beta \in \pi_q(Y, B)$, аналогичное известному топологическому произведению классов гомологий. Оказывается, что это произведение дистрибутивно, ассоциативно, коммутативно (со знаком $(-1)^{pq}$), натурально (т. е. перестановочно с гомоморфизмами, порожденными непрерывными отображениями) и, кроме того, обладает следующим свойством: если $\alpha \in \pi_p(X, A)$, $\alpha' \in \pi_m(E^p, S^{p-1})$ (где $E^p$ ячейка размерности $p > 1$, а $S^{p-1}$ — ее граничная сфера), $\beta \in \pi_q(Y, B)$, $\beta' \in \pi_n(E^q, S^{q-1})$, $q > 1$, то $(\alpha \bigstar \beta) \circ (\alpha' \bigstar \beta') = (\alpha \circ \alpha') \bigstar (\beta \circ \beta')$; здесь $\circ$ обозначает композицию гомотопических классов, порожденную композицией непрерывных отображений.

В статье рассмотрены различные соотношения между тремя введенными произведениями и с помощью этих произведений доказаны две теоремы о гомотопических группах триад, из которых мы приведем лишь первую. Пусть $X$ — связный полиэдр (CW — комплекс), $A$ и $B$ — такие его подполиэдры (замкнутые подкомплексы), что $X = A \cup B$, причем $(A, A \cap B)$ и $(B, A \cap B)$ являются соответственно $(m-1)$-связной и $(n-1)$-связной парами, $m > 1$, $n > 1$, (пара $(Y, C)$ называется $r$-связной, если $\pi_i(Y, C) = 0$ для $i \leqslant r$), а подкомплекс $A \cap B$ связен и односвязен. Тогда гомоморфизм тензорного произведения $\pi_m(A, A \cap B) \otimes \otimes \pi_n(B, A \cap B)$ в группу $\pi_{m+n-1}(X, A, B)$, порожденный обобщенным умножением Уайтхеда, инъективен (т. е. его ядро тривиально) и является инъекцией на прямое слагаемое. Заметим, что для $r < m + n - 1$ группы $\pi_r(X, A, B)$ тривиальны.

Примечание референта. В следующей своей работе (см. реф. 5089) авторы доказали, что это прямое слагаемое совпадает со всей группой $\pi_{m+n-1}(X, A, B)$. *М. М. Постников*

**5089. Гомотопические группы триад. III. Блейкерс, Масси** (The homotopy groups of a triad. III. Blakers A. L., Massey W. S.), Ann. Math., 1953, 58, № 3, 409—417 (англ.)

Используя результаты Мура (см. реф. 5087), авторы уточняют теорему о строении группы $\pi_{n+m-1}(X;A,B)$, доказанную ими в предыдущей работе (см. реф. 5088). Именно, оказывается, что указанное в этой теореме прямое слагаемое совпадает со всей группой $\pi_{n+m-1}(X; A, B)$. При помощи этой уточненной теоремы авторы исследуют относительные гомотопические группы $\pi_{m+n}(X^*, X)$, где $X$ — произвольный полиэдр, а $X^*$ получается из $X$ «приклеиванием» нескольких $n$-мерных ячеек. В качестве применения общей теории авторы изучают гомотопические группы букетов сфер. Отметим в качестве иллюстрации полученных результатов следующее предложение: $(3n-2)$-мерная гомотопическая группа букета, составленного из трех $n$-мерных сфер, есть прямая сумма четырнадцати подгрупп, из которых восемь являются свободными циклическими группами, три — изоморфны группе $\pi_{3n-2}(S^n)$, а последние три — изоморфны группе $\pi_{3n-2}(S^{2n-1})$. *М. М. Постников*

**5090. Приведенные степени Стинрода, индекс инерции и род в смысле Тодда. Хирцебрух** (On Steenrod's reduced powers, the index of inertia, and the Todd genus. Hirzebruch Friedrich), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 9, 951—956 (англ.)

Формальным степенным рядом $A$ называется выражение вида $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, где $a_0 = 1$, а $a_i$, $i > 0$ — независимые переменные.

Пусть $\{K_j\}$ — такая последовательность многочленов с рациональными коэффициентами от переменных $a_i$, что каждый член многочлена $K_j$ имеет один и тот же вес $j$ (весом одночлена $a_{i_1}^{p_1} \dots a_{i_n}^{p_n}$ от переменных $a_i$ называется сумма $p_1 i_1 + \dots + p_n i_n$). Для любого формального степенного ряда $C = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ определим ряд

$$K(C) = \sum_{j=0}^{\infty} K_j(c_0, \dots, c_j)\, x^j.$$

Последовательность $\{K_j\}$ называется мультипликативной, если для любых двух формальных степенных рядов $A$ и $B$ имеет место тождество $K(A)K(B) = K(AB)$.

Пусть $Q(x)$ — произвольный числовой степенной ряд и пусть $j$ — некоторое число. Определим символы $\alpha_1, \dots, \alpha_j$ формальным равенством

$$1 + a_1 x + \dots + a_j x^j = (1 + \alpha_1 x) \dots (1 + \alpha_j x).$$

Произведение $Q(\alpha_1 x) \dots Q(\alpha_j x)$ является степенным рядом с полиномиальными (относительно $a_i$) коэффициентами. Коэффициент этого ряда при $x^j$ обозначим через $K_j$. Оказывается, что последовательность $\{K_j\}$ мультипликативна. Если $Q(x) = -x(e^{-x}-1)^{-1}$, то соответствующая мультипликативная последовательность $\{T_j\}$ называется последовательностью Тодда. Автор вводит также мультипликативную последовательность $\{L_j\}$, для которой $Q(x) = \sqrt{x}(\operatorname{th}\sqrt{x})^{-1}$. Если $q$ — простое число, то коэффициенты многочленов $q^r T_{(q-1)r}$ и $q^r L_{1/2(q-1)r}$ не содержат $q$ в знаменателях.

Пусть $M^m$ — компактное ориентируемое многообразие, а

$$\mathcal{P}_q^r : H^k(M^m, Z_q) \to H^{k+2(q-1)r}(M^m, Z_q)$$

— приведенные степени Стинрода (РЖМат, 1954, 2902). Если $k = m - 2(q-1)r$, то согласно теореме двойственности Пуанкаре существуют такие классы $s_q^r \in H^{2(q-1)r}(M^m, Z_q)$, что $\mathcal{P}_q^r u = s_q^r u$ для всех $u \in H^k(M^m, Z_q)$. Автор утверждает, что если $q$ — нечетно, то

$$s_q^r \equiv q^r L_{1/2(q-1)r}(p_1, \dots, p_{1/2(q-1)r}) \bmod q,$$

а если многообразие $M^m$ почти комплексно, то

$$s_q^r \equiv q^r T_{(q-1)r}(c_1, \dots, c_{(q-1)r}) \bmod q,$$

где $p_i \in H^{4i}(M^m, Z)$, $c_i \in H^{2i}(M^m, Z)$ — характеристические классы соответственно Понтрягина и Черна (Чжэнь Шэн-шэнь). Если же $q = 2$, то имеют место аналогичные формулы для введенных У (У Вэньдзунь) классов $u^i$.

Если $m = 4k$, то класс $L_k(p_i)$ можно рассматривать как рациональное число. Утверждается (со ссылкой на Тома, см. РЖМат, 1953, 131, 132, 134, 1124), что это число равно индексу инерции (сигнатуре, в смысле Рохлина) $\tau(M^{4k})$ многообразия $M^{4k}$. Отсюда получается (помимо известных) много новых соотношений между характеристическими классами.

Для индекса инерции $\tau$ сформулировано следующее утверждение: если многообразие $M$ расслоено на комплексные проективные пространства $P$ (с группой всех проективных преобразований в качестве структурной группы), то $\tau(M) = \tau(B)\tau(P)$, где $B$ есть база этого расслоения. Согласно Тому (там же), любой класс $x \in H^2(M^{4k+2}, Z)$ может быть представлен некоторым подмногообразием $V^{4k}$. Индекс $\tau(V^{4k})$ зависит только от $x$ и обозначается через $\tau(x)$. Пусть $x_1, \dots, x_r \in H^2(M^{4k+2}, Z)$ и пусть класс $x_1$ представлен подмногообразием $V^{4k}$, часть класса $x_2$ на $V^{4k}$ представлена подмногообразием $V^{4k-2}$, часть $x_3$ на $V^{4k-2}$ подмногообразием $V^{4k-4}$ и т. д. Индекс $\tau(V^{4k-2r-2})$ последнего подмногообразия зависит только от $x_1, \dots, x_r$ (независимо от их порядка) и обозначается через $\tau(x_1, \dots, x_r)$. Утверждается, что $\tau(x_1, x_2) = \tau(x_1) + \tau(x_2) - \tau(x_1, x_2, x_1 + x_2)$.

Пусть многообразие $M$ почти комплексно и имеет комплексную размерность $n$. Класс $T_n(c_i)$ можно рассматривать как рациональное число. Это число обозначается через $T(M)$ и называется родом многообразия в смысле Тодда. Оно подробно изучалось в случае, когда $M$ является алгебраическим многообразием (см., например, РЖМат, 1954, 3060). Автор утверждает, что число $2^{n-1}T(M)$ — целое. Для классов Черна отсюда следуют некоторые соотношения, которые можно явно выписать. Кроме того, для $T(M)$ имеет место формула умножения, аналогичная формуле для $\tau(M)$. Определение функций $\tau(x)$, $\tau(x_1, \ldots, x_r)$ также можно перенести на случай рода в смысле Тодда, причем имеет место аналогичная формула сложения.

Доказательств статья не содержит.

*М. М. Постников*

**5091. О понятии пространства в топологии. Александров** (A tér fogalmáról a topológiában. Alekszandrov P. Sz.), A magyar tudoman. akad. Mat. és fiz. osztályának közleményei, 1953, **3**, № 2, 173—188 (венг.)

Доклад, прочитанный автором 15 декабря 1952 г. Дан общий обзор развития теории топологических пространств. Сформулированы важнейшие результаты, полученные в этой области советскими математиками: П. С. Урысоном, П. С. Александровым, А. Н. Тихоновым, Ю. М. Смирновым, В. А. Ефремовичем.

*В. Г. Болтянский*

**5092 РЕЦ. Топология. Куратовский** (Topologie. Kuratowski C., Bd. I, 3. Aufl., 450 S., Bd. II, 2. Aufl., 443 S., Verlag der Polnischen Mathematikervereinigung, Warschau, 1952) [Рецензия: **Радон** (Radon J.), Monatsh. Math., 1954, **57**, № 4, 360—361 (нем.)]

**5093 РЕЦ. Топологический коллоквиум (Расслоенные пространства). Брюссель, 5—8 июня 1950 г.** (Colloque de topologie (Espaces fibrés). Tenu à Bruxelles du 5 au 8 juin 1950, Liège — Paris, 1951) [Рецензия: **Кнезер** (Kneser H.), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1953, **56**, № 2/3, Abt. 2, 50 (нем.)]

---

**См. также:** 5068, 5243, 5251, 5252, 5253

## ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

**5094. Одно общее свойство функций. Бонферрони** (Una proprieta generale delle funzioni. Bonferroni Carlo), Boll. Unione mat. ital., 1953, сер. 3, 8, № 4, 384—390 (итал.)

Пусть $y = f(x)$, где $x$ и $y$ — точки двух евклидовых пространств, причем $x$ меняется в параллелепипеде $R$. Из $R$ можно удалить не более чем счетное множество точек так, чтобы для каждой оставшейся точки $x^*$ существовала последовательность $\{x_n\}$, $x_n \neq x^*$, такая, что $x_n \to x^*$ и $f(x^*) = \lim f(x_n)$.

*И. П. Натансон*

**5095. Представление верхних и нижних интегралов интегралами измеримых функций. Крикеберг** (Darstellungen oberer und unterer Integrale durch Integrale meßbarer Funktionen. Krickeberg Klaus), Arch. Math., 1953, **4**, № 5/6, 432—436 (нем.)

В предыдущей работе автора (РЖМат, 1953, 146) верхние и нижние интегралы изучались при весьма общих предположениях как вполне аддитивные функции множества. В реферируемой работе (использующей обозначения предыдущей работы) они представляются в виде интегралов измеримых функций.

Пусть $\mu$ — слабо конечная мера на борелевском кольце $\mathfrak{S}$ и $f$ — действительная функция на $M \in \mathfrak{S}$. В книге Хана и Розенталя (Hahn, Rosenthal, Set functions, Albuquerque, 1948) рассмотрены верхние и нижние интегралы $\overset{\circ}{\int_M} f\,d\mu$ и $\underset{\circ}{\int_M} f\,d\mu$ (обозначаемые там $\overline{\int}$ и $\overline{\overline{\int}}$) и показано, что если первый $< +\infty$ или второй $> -\infty$, то $\overset{\circ}{\int_X} f\,d\mu$ и $\underset{\circ}{\int_X} f\,d\mu$ ($X \subset M$, $X \in \mathfrak{S}$) представимы интегралами от измеримых и интегрируемых на $M$ функций $f^*$ и $f_*$. В общем случае $\overset{\circ}{\int_X}$ может не быть вполне аддитивным.

В реферируемой работе с помощью теоремы Радона — Никодима, исходя из полной аддитивности $\overset{*}{\int}$, устанавливается существование такой $f^*$, что $\overset{*}{\int_X} f\,d\mu = \int_X f^*\,d\mu$, если $\overset{*}{\int_M} f\,d\mu$ существует. Даются характеристики мажорантной функции $f^*$.

*П. И. Романовский*

**5096. Интегралы Стилтьеса. Эрим** (Stieltjessche Integrale. Erim Kerim), Rend. Circ. mat. Palermo, 1952, сер. 2, **1**, 332—342 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Дается обобщение классического определения $k$-мерного интеграла Римана — Стилтьеса (при $k = 1$ это сделал Копленд (Copeland H., Bull. Amer. Math. Soc., 1937, **43**, 581—588); при $k = 2, 3$ — автор в 1939 и 1941 гг.).

Если непрерывная (или допускающая разрывы при некоторых ограничительных предположениях) функция $f$ на $k$-мерном интервале $I$ удовлетворяет специальным требованиям (при $k = 1$ им, например, удовлетворяет непрерывная возрастающая функция с единичным приращением) и если $g$ — ограниченная функция (точки разрыва которой располагаются на конечном числе гиперповерхностей, пересекающихся с параллелями осей в одной точке, и удовлетворяют другим требованиям), то обобщенный интеграл Стилтьеса $\int_I g\,df$ определяется как

$\lim_{m\to\infty} \frac{g(P_1)+\ldots+g(P_m)}{m}$, где точки $P_i$ выбираются по рассмотренному в работе закону.

Доказывается, что обобщенный интеграл Стилтьеса существует, если существует классический интеграл Римана — Стилтьеса $(R-S)\int_I g\,df$ (при наложенных на $f$ и $g$ ограничениях). *П. И. Романовский*

**5097. Об одном предположении Штейнхауса.** Реньи (On a conjecture of H. Steinhaus. Rényi Alfred), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, 25, 279—287 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Рассматривается конечная или бесконечная последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}$, определенных на некотором отрезке $(a, b)$. Ищутся условия, которые должны быть наложены на $\{f_n(x)\}$, чтобы последовательность

$$\{f_1^{m_1}(x)\, f_2^{m_2}(x)\ldots f_n^{m_n}(x)\}, \qquad (1)$$

где $m_1, m_2, \ldots, m_n$ независимо друг от друга пробегают все целые неотрицательные значения, была полна в $L^2(a, b)$.

Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется максимальной на $(a, b)$, если существует множество $Z\subset(a, b)$ меры нуль такое, что из

$$x_1\notin Z,\ x_2\notin Z \text{ и } f_n(x_1)=f_n(x_2)\ (n=1, 2, \ldots)$$

следует $x_1=x_2$. Устанавливается следующий основной результат: Если последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно ограниченных измеримых функций максимальна на $(a, b)$, то последовательность (1) полна в $L^2(a, b)$. Далее доказывается, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ состоит из стохастически независимых на $(a, b)$ функций (Халмош П., Теория меры, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953, 187), то для ее максимальности необходимо, чтобы она была «насыщена по независимости» (т. е. чтобы не существовало функции $g(x)\not\equiv\text{const}$, стохастически независимой со всеми $f_n(x)$).

Примечание референта. На стр. 284, строки 3 и 5 сверху, вместо «теорема 1» следует читать «лемма 2». *Ю. В. Прохоров*

**5098. Достаточные условия ограниченности линейной вариации функции трех переменных.** Витушкин А. Г., Матем. сб., 1954, 34(76), № 2, 307—322

Множеством уровня $t$ действительной функции $f(P)$ называется совокупность точек $Q$, для которых $f(Q)=t$. Обозначим через $\xi(t)$ число компонент уровня $t$.

Определение. Число $\int_{-\infty}^{\infty}\xi(t)\,dt$ называется линейной вариацией функции $f(P)$ (интеграл понимается как внешний).

Для функций одного переменного это определение приводит к обычной вариации. Доказывается теорема:

Пусть $t=f(x, y, z)=f(P)$ дважды дифференцируема в замкнутом кубе $I$. Если частные производные второго порядка от $f(P)$ удовлетворяют условию Липшица, то $f(P)$ имеет конечную линейную вариацию.

Отмечается, что условие гладкости существенно, так как существуют трижды дифференцируемые функции трех переменных с неограниченными третьими производными, имеющие в $I$ бесконечную линейную вариацию.

Для функций двух переменных аналогичный результат приведен в работе А. С. Кронрода (Докл. АН СССР, 1949, 66, № 5, 797—800). *А. Я. Дубовицкий*

**5099. Об интегрируемости по Риману функции Крофтона.** Фаст, Гёц (Sur l'intégrabilité riemannienne de la fonction de Crofton. Fast H., Götz A.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon. math.), 1952, 25, 309—322 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Положение прямой $l$ на плоскости определяется числами $p$ и $\theta$, характеризующими длину и направление опущенного на $l$ из начала координат перпендикуляра, чем устанавливается соответствие между прямыми $[p, \theta]$ плоскости $(xy)$ и точками $(p, \theta)$ множества $Z=E_{(p,\,\theta)}\{-\infty<p<\infty;\ 0\leqslant\theta<\pi\}$ плоскости $(p\theta)$. Мера множества прямых определяется как плоская мера Лебега соответствующего точечного множества на плоскости $(p\theta)$. Функция Крофтона $N_K(p, \theta)$ данной кривой $K$ в плоскости $(xy)$ определяется как число точек пересечения кривой $K$ с прямой $[p, \theta]$. Спрямляемость кривой $K$ необходима и достаточна для суммируемости этой функции. В реферируемой работе рассматривается вопрос об условиях интегрируемости функции Крофтона в смысле Римана в случае ее ограниченности.

Точка $P$ кривой $K$ называется особой, если множество прямых, предельных для секущих $P'P''$ при $P'\to P$, $P''\to P$, содержит более одной прямой. Тогда имеет место следующее предложение: Если множество особых точек простой дуги $K$ имеет линейную меру нуль (положительную меру), то множество точек разрыва функции $N_K(p, \theta)$ имеет плоскую меру нуль (положительную меру).

Отсюда как следствие получается: Если функция $N_K(p, \theta)$ ограничена, то для ее интегрируемости в смысле Римана необходимо и достаточно, чтобы множество особых точек дуги $K$ имело линейную меру нуль. *В. В. Рыжков*

**5100. Об одном обобщении теоремы С. М. Никольского о компактности классов дифференцируемых функций.** Кудрявцев Л. Д., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 1 (59), 111—120

Рассматриваются классы $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}(M_1,\ldots,M_n)$, $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}(G; M_1,\ldots,M_n)$ и $H_p^{(r)}(G, M)$, определенные в работах С. М. Никольского (РЖМат, 1953, 148).

Пусть $E^{(n)}$ — $n$-мерное пространство и $E^{(m)}_{x^{(0)}_{m+1},\ldots,x^{(0)}_n}$ — его $m$-мерное подпространство точек с фиксированными координатами $x^{(0)}_{m+1},\ldots,x^{(0)}_n$, и пусть $L_p^{(n)}(G)$ — пространство функций, суммируемых в $p$-ой степени на множестве $G\subseteq E^n$.

Доказывается, что если $1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty$, $1 \leqslant m \leqslant n$,

$$\varkappa_m = 1 - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}\right) \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{r_j} - \frac{1}{p} \sum_{i=m+1}^{n} \frac{1}{r_i},$$

$$\omega_\tau = \varkappa_m - \sum_{j=1}^{m} \frac{\tau_j}{r_j}, \quad \chi_\lambda = \varkappa_m - \sum_{k=m+1}^{n} \frac{\lambda_k}{r_k},$$

то из всякой ограниченной в $L_p^{(n)}$ системы функций класса $H^{(r_1, \ldots, r_n)}(M_1, \ldots, M_n)$ можно выделить последовательность $\{f_k\}$ такую, что каковы бы ни были фиксированные значения $x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ и компакт $\Phi \subset E^{(n)}$ последовательность $f_k(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ сходится в пространстве $L_{p'}^m\left(\Phi \cap E^{(m)}_{x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}}\right)$ вместе со всеми своими частными производными $f_k^{(\tau)}$ и нормальными производными $f_k^{(\lambda)}$, для которых $\omega_\tau > 0$ и $\chi_\lambda > 0$, причем эта сходимость равномерна относительно $x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$. Пределы нормальных производных суть соответствующие нормальные производные предельной функции $F$, и для любой ограниченной области $G \subset E^{(m)}$ $F^{(\tau)} \in H_{p'}^{(\sigma_1, \ldots \sigma_m)}(G)$, где $\sigma_j = r_j \omega_\tau$, а $F^{(\lambda)} \in H_{p'}^{(\beta_1, \ldots, \beta_m)}(G)$, где

$$\beta_j = r_j \chi_\lambda \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Первая часть этого утверждения для случая несмешанных частных производных и данного $m$-мерного подпространства была получена в работе С. М. Никольского (Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 1951, 38, 244—278), обобщившего соответствующие результаты В. И. Кондрашова (Докл. АН СССР, 1945, 48, 563—566).

Приведен еще критерий компактности для классов $H_p^{(r)}(G; M_1, \ldots, M_n)$ функций, определенных на некоторой области $G$ из $E^{(n)}$, и дающий условие для того, чтобы из ограниченного в $L_p^{(n)}(G)$ множества функций такого класса можно было бы выделить последовательность, которая на заданном $m$-мерном достаточно гладком замкнутом многообразии $\Gamma_m$ сходилась бы в смысле метрики $L_{p'}^{(m)}$ $(1 \leqslant p \leqslant p' \leqslant \infty, 1 \leqslant m \leqslant n)$ вместе со своими так называемыми обобщенными нормальными и касательными относительно $\Gamma_m$ производными соответствующих порядков.

Доказательства так же, как и в случае, рассматривавшемся С. М. Никольским, основываются на свойствах разложений функций изучаемых классов в ряды по целым функциям конечной степени.

*А. Ф. Тиман*

**5101 К. Проблемы тотализации, относящиеся к несуммируемым лапласианам. Тшицинский** (Les problèmes de totalisation se rattachant aux laplaciens non sommables. Trjitzinsky W. J., 95 pp., Gauthier-Villars, Paris, 1954, 1400 fr.), Bibliogr. France, 1954, **143**, № 10, 224 (библ.)

## ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

**5102. К вопросу о разложимости почти-периодических функций в конечную сумму почти-периодических функций. Кованько А. С.,** Уч. зап. Львовского гос. ун-та, сер. физ.-матем., 1953, **22**, № 5, 12—16

Показывается, что конструкция приближения почти периодической функции суммами Бохнера — Фейера дает возможность установить следующий факт: Пусть $f(x)$ — почти периодическая функция Бора, $\sum A_{\lambda_n} e^{i\lambda_n x}$ — ее ряд Фурье. Если спектр $\{\lambda_n\}$ этой функции разложен на две непересекающиеся части $\{\lambda_n'\}$ и $\{\lambda_n''\}$, базисы которых не пересекаются и дают в объединении базис множества $\{\lambda_n\}$, то ряды $\sum A_{\lambda_n'} e^{i\lambda_n' x}$ и $\sum A_{\lambda_n''} e^{i\lambda_n'' x}$ являются рядами Фурье почти периодических функций Бора $f_1(x)$ и $f_2(x)$ таких, что $f_1(x) + f_2(x) = f(x)$.

В работе имеются опечатки. *Ю. М. Березанский*

**См. также**: 5027, 5104, 5125, 5147, 5149, 5150, 5160, 5173, 5175, 5178, 5180, 5182

## ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

**5103. Об обращении теоремы Абеля. Цудзи** (On the converse of Abel's theorem. Tsuji Masatsugu), J. Math. Soc. Japan, 1953, **5**, № 1, 81—85 (англ.)

Дается новое доказательство теоремы Харди и Литлвуда (Hardy, Littlewood, Proc. London Math. Soc., 1923, **22**, 254—269; см. также Титчмарш, Теория функций, перевод с английского, 1951, стр. 265), состоящей в том, что если функция $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ регулярна при $|x| < 1$, $f(x) \to s$ при $x \to 1$ вдоль кривой $C$, лежащей в $|x| < 1$ и оканчивающейся в точке $x = 1$, $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, то $\sum_0^\infty a_n = s$.

*А. Ф. Леонтьев*

**5104. Об интеграле Дирихле. Митрович** (O dirichletovom integralu. Mitrović Dragiša.), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, **8**, сер. 2, № 1, 44—46 (хорв.; резюме франц.)

Доказываются формулы:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta)\cos\frac{\theta(2+np-p)}{2}\,\frac{\sin\frac{np\theta}{2}}{\sin\frac{p\theta}{2}}\,d\theta = \sum_{k=1}^{n}\frac{r^{1+kp-p}}{(1+kp-p)!}\operatorname{Re}\{f^{(1+kp-p)}(0)\}, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} P(r,\theta)\sin\frac{\theta(2+np-p)}{2}\,\frac{\sin\frac{np\theta}{2}}{\sin\frac{p\theta}{2}}\,d\theta = -\sum_{k=1}^{n}\frac{r^{1+kp-p}}{(1+kp-p)!}\operatorname{Im}\{f^{(1+kp-p)}(0)\}, \quad (2)$$

где $p$ — целое неотрицательное число, $P(r,\theta)$ — действительная часть голоморфной в круге $|z|<R$ функции $f(z)$, $z=re^{i\theta}$, $0\leqslant r<R$.

Автор указывает еще на две формулы, получающиеся из формул (1) и (2) при $p=2$. Из формулы (1) при $p=2$ получается также формула

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{r^{2k-1}}{(2k-1)!}\operatorname{Re}\{f^{(2k-1)}(0)\} = \frac{1}{4}P(r,+0). \quad (3)$$

Приложений полученных формул автор не указывает. *Н. А. Давыдов*

**5105. Одно обобщение теоремы Римана об отображениях. Бёрлинг** (An extension of the Riemann mapping theorem. Beurling Arne), Acta math., 1953, **90**, № 1—2, 117—130 (англ.)

Пусть $\Phi(w)$ — определенная при $|w|<\infty$ непрерывная положительная ограниченная функция и $w_0$ — фиксированная точка плоскости $w$. Рассматривается следующая задача: определить, существуют ли среди функций $f(z)$, голоморфных в $|z|<1$ и нормированных условиями $f(0)=w_0$ и $f'(0)>0$, однолистные функции, являющиеся решением граничной задачи

$$\lim_{|z|\uparrow 1}(|f'(z)|-\Phi(f(z)))=0, \quad (1)$$

и при каких условиях существует единственное решение этой задачи.

Пусть $A_\Phi$ — класс голоморфных в $|z|<1$ нормированных функций $f(z)$, удовлетворяющих неравенству

$$\lim_{|z|\uparrow 1}\sup(|f'(z)|-\Phi(f(z)))\leqslant 0,$$

$B_\Phi$ — класс голоморфных и однолистных в $|z|<1$ нормированных функций $g(z)$, для которых

$$\lim_{|z|\uparrow 1}\inf(|g'(z)|-\Phi(g(z)))\geqslant 0,$$

и $C_\Phi$ — класс решений задачи (1). Пусть, далее, $A^*$ — соединение множеств значений $w$, принимаемых функциями класса $A_\Phi$, и $B^*$ — пересечением множеств значений $w$, принимаемых функциями класса $B_\Phi$.

Доказывается теорема: $A^*$ и $B^*$ односвязные области; нормированные функции $f^*(z)$ и $g^*(z)$, конформно отображающие $|z|<1$ соответственно на $A^*$ и $B^*$, являются решениями задачи (1); всякое решение задачи отображает $|z|<1$ на область, принадлежащую $A^*$ и содержащую $B^*$; если $\ln\frac{1}{\Phi(w)}$ — субгармоническая функция, то $A^*\equiv B^*$ и задача (1) имеет единственное решение.

*П. П. Кубарев*

**5106. Дифференциальное уравнение, интегралы которого отображают полуплоскость на полигональную область. Попова** (Дыферэнцыяльнае ураўненне, інтэгралы якога адлюстроўваюць паўплоскасць на паліганальную вобласць. Попова Н. В.), Весці АН БССР, 1953, № 5, 156—163 (белорусск.)

См. РЖМат, 1954, 2564, 3296.

**5107. О краевой задаче Римана для случая пересекающихся контуров. Гахов Ф. Д., Чибрикова Л. И.**, Уч. зап. Казанского ун-та, 1953, **113**, № 10, 107—110

Пусть $L$ — совокупность конечного числа замкнутых и разомкнутых контуров, имеющих конечное число точек пересечения.

Рассматривается следующая граничная задача. Определить кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, удовлетворяющую на $L$ граничному условию

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),$$

где $G(t)$ и $g(t)$ — заданные на $L$ функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, причем всюду на $L$ $G(t)\neq 0$.

Авторы дают более простой метод решения этой задачи, чем указанный ранее в работе референта (Тр. Тбилисского матем. ин-та АН ГрузССР, 1949, № 17, 1—27). В частности, пользуясь установленным Н. И. Мусхелишвили поведением интегралов типа Коши вблизи точек разрыва плотности, авторы дают более простое выражение так называемого канонического решения задачи, единообразное для замкнутых и разомкнутых контуров. *Д. А. Квеселава*

**5108. Об одной граничной задаче линейного сопряжения. Векуа Н. П.**, Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 2, 173—176

Пусть на границе $L$ односвязной области $D^+$ задана функция $\tau=\alpha(t)$, имеющая отличную от нуля производную, удовлетворяющую условию Гельдера, и отображающая контур $L$ на самого себя взаимно однозначно, изменяя направление на обратное.

В работе дается решение следующей граничной задачи.

Определить вектор $\varphi(z)=(\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n)$, мероморфный в области $D^+$ и непрерывно продолжимый на $L$ по граничному условию

$$\varphi^+[\alpha(t)]=G(t)\varphi^+(t)+g(t) \text{ на } L,$$

где $G(t)=\|C_{kj}(t)\|$, $k,j=1,2,\ldots,n$ — заданная матрица, удовлетворяющая условию Гельдера,

$g(t) = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ — заданный вектор, также удовлетворяющий условию Гельдера.

Предполагается, что контур $L$ удовлетворяет условию Ляпунова, а $\det G(t) \neq 0$ всюду на $L$.

Эта задача при $n = 1$ и $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$ была поставлена Карлеманом и решена Д. А. Квеселава. При $n > 1$, но опять при условии $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$ она исследована Н. П. Векуа.

В настоящей работе дано решение рассматриваемой задачи при $\alpha_m(t) \equiv t$, где $\alpha_{k+1}(t) = \alpha[\alpha_k(t)]$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$, $\alpha_1(t) = \alpha(t)$, $m$ — целое, четное. *Д. А. Квеселава*

**5109. Об одном приближенном решении задачи об одиночной волне. Апте** (Sur une solution approchée du problème de l'onde solitaire. Aptéachuyt), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 26, 2477—2479 (франц.)

Приводится приближенное решение следующей задачи теории конформных отображений. Область $F$ плоскости комплексной переменной $f = \varphi + i\psi$, ограниченная линиями: 1) $\psi = 0$, $-\infty \leqslant \varphi \leqslant 0$; 2) $\varphi = 0$, $\frac{1-k}{k} \leqslant \psi \leqslant 0$ ($k$ — вещественная постоянная $> 1$); 3) $\psi = \frac{1-k}{k}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \infty$; 4) $\psi = -1$, $-\infty \leqslant \varphi \leqslant \infty$ конформно отображается на область $D$ плоскости комплексной переменной $Z = X + iY$, ограниченную полупрямыми: 1) $X = 0$, $0 \leqslant Y \leqslant \infty$; 2) $Y = 0$, $0 \leqslant X \leqslant \infty$; 3) $X = \frac{1}{h}$, $1 \leqslant Y \leqslant \infty$ ($h$ — постоянная $> 0$); 4) $Y = 1$, $\frac{1}{h} \leqslant X \leqslant \infty$, при соответствии точек: 1) $f = 0$, $Z = 0$; 2) $f = -\infty + i\psi$, $Z = \infty + iY$; 3) $f = \infty + i\psi$, $Z = X + i\infty$. Обозначим через $f = f(Z)$ отображающую функцию, а через $L$ образ полупрямой $\psi = \frac{1-k}{k}$ области $F$ при рассматриваемом конформном отображении; требуется найти такие значения параметров $h$ и $k$, чтобы величина

$$\varepsilon = \left| \left( \frac{1}{2} V^2 + gY \right) - \left( \frac{1}{2} V_\infty^2 + gY_\infty \right) \right|, \qquad (1)$$

где $V = \left| \frac{df}{dZ} \right|$, наименее уклонялась от нуля на линии $L$. Так как в силу известных принципов теории аналитического продолжения функция $f = f(Z)$ конформно отображает полосу

$$\frac{1-k}{k} \leqslant \psi \leqslant 0$$

на область плоскости $Z$, ограниченную осью $Y = 0$, линией $L$ и симметричной с нею относительно оси $X = 0$ линией $L'$, то вышеуказанную задачу можно рассматривать, как приближенную постановку задачи об одиночной волне с «гребнем» на поверхности слоя конечной толщины однородной тяжелой несжимаемой и невязкой жидкости над плоскостью (при точном решении должно быть $\varepsilon = 0$). Автор решает сформулированную выше задачу, применяя параметрический метод конформного отображения и используя вспомогательные переменные $z = x + iy$,

$$\omega = \xi + i\eta = \frac{df}{dz}, \quad w = \bar{\xi} + i\bar{\eta} = -\frac{df}{dZ}.$$

В качестве области значений параметра $z = x + iy$ выбрана полоса $-1 \leqslant y \leqslant 0$. При некотором определенном соответствии точек отображаемых друг на друга областей и при надлежащем определении логарифмов получаются следующие формулы:

$$\pi f = \ln \frac{\omega - 1}{\omega + 1} - \frac{1}{k} \ln \frac{\omega - k}{\omega + k} - i\pi \left( 1 - \frac{1}{k} \right), \qquad (2)$$

$$\pi z = \ln \frac{\omega^2 - 1}{\omega^2 - k^2} + \ln k^2$$

$$\left( \text{в работе ошибочно } \pi z = \ln \frac{\omega^2 - 1}{\omega^2 + 1} \right),$$

$$\pi Z = \ln \frac{w + 1}{w - 1} + \frac{i}{h} \ln \frac{w + ih}{w - ih} + \pi \left( \frac{1}{h} + i \right), \qquad (3)$$

$$\pi z = \ln \frac{w^2 - 1}{w^2 + h^2} - i\pi \ln h^2$$

(в работе в последней формуле ошибочно дается добавочное слагаемое $\ln k^2$). Из указанных формул следует

$$w^2 = \frac{a^2 \omega^2}{b^2 - \omega^2}, \text{ где } a^2 = \frac{h^2 (k^2 - 1)}{h^2 + k^2}, \; b^2 = 1 + a^2. \qquad (4)$$

Пользуясь (2), (3), (4), можно получить параметрические уравнения линии $L$.

По утверждению автора, произведенные вычисления (опущенные в работе) показывают, что при $h = 1{,}8499$ и $k = 1{,}5518$ величина $\varepsilon \leqslant 0{,}003$. В заключение автор сообщает некоторые свойства экстремальной линии $L$. *В. А. Зморович*

**5110. О коэффициентах многолистных функций. Умедзава** (On the coefficients of multivalent functions. Umezawa Toshio), J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 2, 137—144 (англ.)

По определению автора, функция $f(z)$ принадлежит классу $D(p)$, если она регулярна в $|z| \leqslant 1$, не имеет нулей на окружности $|z| = 1$ и если она звездообразна порядка $p$ в направлении одной из своих диаметральных линий, т. е. если образ окружности $|z| = 1$, реализуемый данной функцией, пересекается одной из ее диаметральных линий в $2p$ точках.

При этом диаметральная линия функции понимается в смысле Брёйна (DeBruijn N. G., Neder. Akd. Wetensch., 1941, **44**, 47—49) и Одзаки (Ozaki S., Sci. Repts Tokyo Bunrika Daigaku, 1941, **A4**, 45—87).

Для функций класса $D(p)$ доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть $f(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} a_n z^n$ принадлежит классу $D(p)$.

В таком случае

$$|a_{p+1}| \leqslant \sum_{k=1}^{k=p} \frac{2(2p)!\,(p^2 + p + k^2)}{(p + k + 1)!\,(p - k + 1)!} |a_k|.$$

Теорема 2. Пусть $f(z)=\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n z^n$ принадлежит классу $D(p)$. Если диаметральная линия, в направлении которой $f(z)$ звездообразна порядка $p$, пересекает образ окружности $|z|=1$ в точках $f\left(\zeta e^{i\frac{k\pi}{p}}\right)$.

$$|\zeta|=1,\quad k=0,1,\ldots,2p-1,\ \text{то}$$

$$|a_{mp}|\leqslant m\,|a_p|.$$

$$|a_{np\pm q}|\leqslant n\,|a_p|+|a_q|,\quad q=1,2,\ldots,p-1,$$

где $m$ — произвольно целое число, а $n$ — произвольное четное число.

Теорема 3. Пусть функция $f(z)=\sum_{n=1}^{n=\infty} a_n z^n$ регулярна в $|z|\leqslant 1$ и пусть $z_k$ $(k=1,2,\ldots,m)$ точки окружности $|z|=1$ такие, что центр тяжести точек $z_k^{2p}$ $(k=1,2,\ldots,m)$ совпадает с началом координат. Если существуют $m$ диаметральных линий функции $f(z)$, каждая из которых пересекает образ окружности $|z|=1$ соответственно в точках $f\left(z_k e^{i\frac{s\pi}{p}}\right)$ $(s=0,1,\ldots,2p-1;\ k=1,2,\ldots,m)$, то

$$|a_{n-p}|^2+|a_{n+p}|^2\leqslant 4|a_p|^2,\quad n=p+1,\ p+2,\ldots$$

$$|a_{n-p}|+|a_{n+p}|\leqslant 2\sqrt{2}\,|a_p|,\quad n=p+1,\ p+2,\ldots$$

При доказательстве всех трех теорем существенно использована одна лемма Робертсона (Robertson M. S., Duke Math. J., 1939, 5, 512—519).

Автор отмечает, что оценки теорем 1 и 2 можно получить, не требуя отсутствия нулей функции $f(z)$ на окружности $|z|=1$. *Г. В. Корицкий*

**5111. О максимуме модуля и коэффициентах целых функций. Шах, Исхак** (On the maximum modulus and the coefficients of an entire series. Shah S. M., Ishaq M.), J. Indian Math. Soc., 1952, 16, 177—182 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть $f(z)=\sum a_n z^n$ — целая функция, $M(r)$ — ее максимум модуля, $\mu(r)$ — максимальный член ряда и $\nu(r)$ — номер максимального члена. Пусть, далее, $\ln_k r$ означает $k$-ую итерацию $\ln r$. Авторы устанавливают целый ряд равенств и неравенств, связывающих $\overline{\lim}$ и $\underline{\lim}$ отношений $\ln_k M(r)$, $\ln_k \mu(r)$, $\ln_{k-1}\nu(r)$, к $\overline{\ln_k r}$ или $\ln_{k-1} r$, а также $\ln_k n$ и $\ln_{k+1} n$ к $\ln_k (n^{-1}\ln|a_n^{-1}|)$.

В качестве типичных приведем следующие результаты:

$$t_k=\underline{\lim}\,\{\ln_k M(r)\}\,/\ln_k r=\underline{\lim}\,\{\ln_k \mu(r)\}\,/\ln_k r,\quad k\geqslant 2,$$

и аналогично для $\overline{\lim}$. Если

$$\delta_k=\underline{\lim}\,\{\ln_{k-1}\nu(r)\}\,/\ln_k r,$$

то $t_2=1+\delta_2$, в то время как $t_k=\max(1,\delta_k)$ для $k\geqslant 3$; аналогично для $\overline{\lim}$. *R. P. Boas*

Перевод из Math. Rev., 1953, 14, № 7, 631.

**5112. О распределении нулей целой функции. Бак** (On the distribution of the zeros of an entire function. Buck R. Creighton), J. Indian Math. Soc., 1952, 16, 147—149 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Пусть $n(r)$ — число нулей в круге $|z|\leqslant r$ целой функции $F(z)$ типа $\tau>0$ порядка $\rho>0$, а $L$ и $l$ соответственно равны $\overline{\lim}\, n(x)x^{-\rho}$ и $\underline{\lim}\, n(x)x^{-\rho}$.

Неравенства $l\leqslant\rho\tau$, $L\leqslant e\rho\tau$, полученные Боасом (Boas R. P., Ann. Math., 1946, 47, 21—32), дополнены неравенством

$$l+eL\leqslant e^2\rho\tau.$$

*A. Pfluger*

Перевод из Math. Rev., 1953, 14, № 7, 631.

**5113. Одна теорема о целых функциях. Партхасаратхи** (A theorem on integral functions. Parthasarathy M.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 3, № 11, 377—379 (англ.)

Пусть $f(z)$ — целая функция и $\mu(r)$ — вещественная функция от переменной $r=|z|$. Легко видеть, что для некоторого $n\geqslant 1$, для больших $r$ $|f^{(n)}(z)|<\mu^{(n)}(r)$, то для любого $\varepsilon>0$ и при всех больших $r$

$$|f(z)|<(1+\varepsilon)\,\mu(r).$$

Доказывается следующее обращение этого результата.

Пусть выполнены условия: а) $\mu(r)$ имеет непрерывную производную $\mu^{(n)}(r)>0$, которая возрастает при $r>r_0$; б) $\mu'(r)/\mu(r)\to\infty$ при $r\to\infty$; в) $f(z)$ — целая трансцендентная функция, для которой

$$|f(z)|<\mu(r)\quad\text{при}\quad|z|=r>r_0.$$

Тогда для любого фиксированного $\varepsilon>0$

$$|f^{(n)}(z)|=o\,[\mu^{(n)}(r+\varepsilon)]\quad\text{при}\quad r\to\infty.$$

*М. М. Джрбашян*

**5114. О прямо трансцендентных особенностях функции, обратной к мероморфной функции. Цудзи** (On a direct transcendental singularity of an inverse function of a meromorphic function. Tsuji Masatsugu), J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 1, 75—80 (англ.)

Пусть $\Delta$ есть бесконечная область в плоскости $z$, которая может быть бесконечно связной, $\Gamma$ — ее граница, состоящая не более чем из счетного множества аналитических кривых. Положим, что $\Gamma$ содержит хоть одну кривую, уходящую в бесконечность. Пусть $w=w(z)$ регулярна в $\Delta$ и на $\Gamma$, кроме точки $z=\infty$, так что $|w(z)|<R$ в $\Delta$ и $|w(z)|=R$ на $\Gamma$ и $w(z)\neq 0$ в $\Delta$. Пусть $\Delta_r$ есть часть области $\Delta$, лежащая в круге $|z|<r$. Положим

$$S(r;\ \Delta)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Delta_r}\frac{|w'(z)|^2}{(1+|w(z)|^2)^2}\,dx\,dy,\quad (z=x+iy)$$

$$T(r;\ \Delta)=\int\limits_1^r\frac{S(r;\ \Delta)}{r}\,dr.$$

Область $\Delta_r$ состоит из конечного числа областей. Пусть $\Delta_r^0\ (r\geqslant r_0)$ та из них, которая содержит фиксированную точку $z_0$ области $\Delta$, и $\theta_r$ есть часть $|z|=r$, принадлежащая границе $\Delta_r^0$. $\theta_r$ состоит из конечного числа дуг $\theta_r^i\ (i=1,\ 2,\ \ldots,\ \nu(r))$; $r\theta_i\ (r)$ есть длина дуги $\theta_r^i$.

Положим $\theta(r)=\sum\limits_i\theta_i\ (r)$. Эта функция непрерывна за исключением, быть может, не более чем счетного множества изолированных точек $0<r_1<r_2<\ldots<r_\nu<\ldots$, $r_\nu\to\infty$, $\nu\to\infty$, где $\theta(r_\nu-0)=\theta(r_\nu)<\theta(r_\nu+0)$.

В работе дается новое, более простое доказательство теоремы автора (Tôhoku Math. J., 1951, **3**, № 1, 24—38), утверждающей, что для любого $0<\alpha<1$

$$T(r;\ \Delta)\geqslant\text{const}\exp\left[\pi\int\limits_{r_0}^{\alpha_r}\frac{dr}{r\theta(r)}\right]\quad (r\geqslant r_0).$$

*М. М. Джрбашян*

**5115. О граничных свойствах голоморфных функций, определенных в единичном круге некоторыми произведениями.** Баджемил, Эрдёш, Зейдель (Sur quelques propriétés frontières des fonctions holomorphes définies par certains produits dans le cercle-unité. Bagemihl F., Erdös P., Seidel W.), Ann. scient. École norm. supér., 1953, **70**, № 2, 135—147 (франц.)

В работе изучается функция $f(z)$, определенная в единичном круге произведением

$$f(z)=\prod_{j=1}^{\infty}\left\{1-\left(\frac{z}{1-\frac{1}{n_j}}\right)^{n_j}\right\},$$

в частности прямым и сравнительно элементарным путем доказывается, что для определенным образом выбранной последовательности целых положительных чисел $n_j\to\infty$ $f(z)$ равномерно стремится к бесконечности на некоторой последовательности концентрических колец.

Далее авторы исследуют некоторые другие свойства рассматриваемого ими бесконечного произведения.

Как отмечают и сами авторы, Н. Н. Лузину и И. И. Привалову принадлежит пример степенного ряда с единичным кругом сходимости, сумма которого обладает указанным выше свойством; используя идею Н. Н. Лузина и И. И. Привалова, Н. А. Давыдов построил целый класс таких степенных рядов. *Д. А. Квеселава*

**5116. Об итерации аналитических преобразований в бицикле.** Эрве (Sur l'itération des transformations analytiques dans le bicercle-unité. Hervé Michel), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 23, 1484—1485 (франц.)

Рассматривается аналитическое преобразование

$$x_1=f(x,\ y),\qquad y_1=g(x,\ y),\qquad (t)$$

где $f$ и $g$ голоморфны в бицикле $|x|<1$, $|y|<1$, причем

$$|f(x,\ y)|<1,\qquad |g(x,\ y)|<1.$$

Предел произвольной подпоследовательности итераций преобразования $t$ обозначается через $\tau$. Работа посвящена изучению вида преобразований $\tau$ в случае, когда преобразование $t$ не имеет неподвижной точки внутри бицикла. Любое преобразование $\tau$ в этом случае представляется в одном из следующих видов:

$$x_1=e^{i\alpha}\qquad y_1=\psi(x,\ y)\qquad (1)$$

$$x_1=\varphi(x,\ y)\qquad y_1=e^{i\beta}.\qquad (2)$$

При этом возможны следующие подслучаи:

1) все преобразования $\tau$ имеют вид (1) с определенным значением $e^{i\alpha}$, но с различными функциями $\psi$;

2) все преобразования $\tau$ имеют вид (1) с постоянным $e^{i\alpha}$, но с различными $\psi$ или все они имеют вид (2) с постоянным $e^{i\beta}$, но с различными $\varphi$;

3) последовательность итераций $t$ сходится к преобразованию $x_1=e^{i\alpha}$, $y_1=e^{i\beta}$.

В первом и втором подслучаях ставится вопрос об исследовании структуры множества $E$ образов точки $x=0$, $y=0$. В работе указываются некоторые примеры исследования этого множества в частных случаях. *С. П. Пулькин*

**5117. Дифференциальные уравнения в теории модулярных функций Зигеля.** Масс (Die Differentialgleichungen in der Theorie der Siegelschen Modulfunktionen. Maass Hans), Math. Ann., 1953, **126**, № 1, 44—68 (нем.)

Изучается действие некоторых дифференциальных операторов на различные функции, играющие роль в теории модулярных функций Зигеля. Пусть $Z=(z_{ik})$ и $W=(w_{ik})$ — симметрические матрицы порядка $n$. Полагая $e_{ik}=\frac{1}{2}(1+\delta_{ik})$, автор вводит следующие дифференциальные операторы:

$$D_z=\left(e_{ik}\frac{\partial}{\partial z_{ik}}\right)\text{ и }D_w=\left(e_{ik}\frac{\partial}{\partial w_{ik}}\right).$$

Если $\alpha$ и $\beta$ — произвольные числа, то полагают:

$$\Omega_{\alpha,\beta}=(Z-W)\,((Z-W)D_w)'\,D_z+$$
$$+\alpha(Z-W)\,D_w-\beta(Z-W)\,D_z.$$

Доказывается, что $\Omega_{\alpha,\beta}\,|CZ+D|^{-\alpha}\,|CW+D|^{-\beta}=0$, если $C$ и $D$ — две целочисленные матрицы, образующие вторую матричную строчку некоторой симплектической матрицы. Исследуется преобразование операторов $D_z$, $D_w$ и $\Omega_{\alpha,\beta}$ при замене переменных, соответствующей симплектическому преобразованию $Z$ и $W$. В связи с этим находится оператор Бельтрами в симплектической метрике. Он имеет вид

$$-\operatorname{Sp}(Z-W)\,((Z-W)\,D_w)'\,D_z.$$

Если $\sigma Z = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$ ($W$ преобразуется по той же формуле) есть симплектическое преобразование, то через $f(Z, W) \mid \sigma$ обозначается

$$|CZ + D|^{-\alpha} |CW + D|^{-\beta} f(\sigma Z, \sigma W).$$

Положим $Z = X + iY$, $W = X - iY$, где $X$ и $Y$ — вещественные матрицы, причем $Y$ — положительно определенная матрица. Все $f(Z, W)$, регулярные в этой области и аннулируемые оператором $\Omega_{\alpha,\beta}$, образуют множество, обозначаемое через $\{\alpha, \beta\}$. Доказывается, что для любого симплектического $\sigma$ $\{\alpha, \beta\} \mid \sigma = \{\alpha, \beta\}$. Если $G$ есть подгруппа симплектической группы, а $v(\sigma)$ — числовая функция на $G$, то под $\{G; \alpha, \beta, v\}$ подразумевается множество таких функций $f(Z, W)$, что

$$f(Z, W) \in \{\alpha, \beta\} \quad f(Z, W) \mid \sigma = v(\sigma) f(Z, W).$$

Пусть для $1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_h \leqslant n$, $1 \leqslant k_1 \leqslant \ldots \leqslant k_h \leqslant n$ $\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_h \\ k_1 \ldots k_h \end{pmatrix}_z$ обозначает соответствующий минор матрицы $Z$, а $\begin{bmatrix} i_1 \ldots i_h \\ k_1 \ldots k_h \end{bmatrix}_z$ — матрицы $D_z$.

$$s_h(Z - W, D_Z) = \sum \begin{pmatrix} i_1 \ldots i_h \\ k_1 \ldots k_h \end{pmatrix}_{z-w} \begin{bmatrix} i_1 \ldots i_h \\ k_1 \ldots k_h \end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_h(\alpha) = \alpha \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \ldots \left(\alpha - \frac{h-1}{2}\right),$$

$$M_\alpha = \sum_{h=0}^{n} \frac{\varepsilon_n(\alpha)}{\varepsilon_h(\alpha)} s_h(Z - W, D_z).$$

Доказывается, что

$$M_\alpha |Z|^{-\alpha} |W|^{-\beta} = \varepsilon_n(\alpha) |Z|^{-\alpha-1} |W|^{-\beta+1}$$

при $n = 2$ $M_\alpha\{G; \alpha, \beta, v\} \subset \{G; \alpha + 1, \beta - 1, v\}$. Доказательства основываются на доказанной Кёхером формуле $|D_z| |Z|^\alpha = \alpha \ldots \left(\alpha + \frac{n-1}{2}\right) |Z|^{\alpha-1}$ и ее обобщении на миноры матрицы $D_z$.

В связи с вопросом о разложении функций из $\{\alpha, \beta\}$ в ряды Фурье рассматриваются функции вида $a(Y, T) e^{i \operatorname{Sp} TX}$ при фиксированной матрице $T \neq 0$, содержащиеся в $\{\alpha, \beta\}$, и доказывается, что при $n = 2$ они образуют конечномерное пространство.

*И. Р. Шафаревич*

**См. также:** 5019, 5058 К, 5062, 5073, 5125, 5127, 5136, 5145

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**5118. Обобщение теоремы Пуассона на случай любой системы дифференциальных уравнений.** **Шульгин М. Ф.**, Докл. АН УзССР, 1953, № 11, 3—7 (русск.; резюме узб.)

С помощью расширения по Лиувиллю к данной системе обыкновенных дифференциальных уравнений присоединяется система, сопряженная с уравнениями в вариациях. Доказана, теорема, обобщающая теорему Буля (Buhl A., C. r. Acad. sci., 1901, **132**, 313—316) и позволяющая построить известным способом интеграл данной системы по одному ее интегралу и интегралу расширенной системы. Рассмотрен случай системы, не зависящий явно от времени, когда применение теоремы оказывается весьма простым (дифференцирование по времени известного интеграла). Последний случай иллюстрируется примером линейной системы.

Примечание референта. В статье допущена неточность в формулировке теоремы: слово «новый» необходимо опустить. *И. С. Аржаных*

**5119. Об устойчивости движения при постоянно действующих возмущениях.** **Ворович И. И.**, Уч. зап. Ростовского-на-Дону ун-та, Тр. физ.-матем. фак-та, 1953, 18, № 3, 99—105

Автор рассматривает систему

$$\dot{x}_i = F_i[x_1, \ldots, x_n; t; P_1(x_1, \ldots, x_n; t) \ldots$$

$$\ldots P_k(x_1, \ldots, x_n; t)], \quad i = 1, \ldots, n, \text{ где } P_i \ (i = 1, \ldots, k)$$

выражают постоянно действующие возмущения, сводя ее к системе

$$\dot{\zeta}_i = f_i\{\zeta_p; t; \zeta_s\}, \qquad \begin{matrix} i, \ p = 1, \ldots, n \\ s = n+1, \ldots, m, \end{matrix}$$

где $\zeta_s = \zeta_s(\zeta_1, \ldots, \zeta_n; t)$ обозначают возмущения и $f_i(0, \ldots, 0; t; 0, \ldots, 0) \equiv 0$. Следовательно, если все $\zeta_s \equiv 0$, то все $\zeta_i \equiv 0$. Доказывается теорема: Если 1) $f_i = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \zeta_p + \varphi_i$, где $\varphi_i$ непрерывны и содержат члены не ниже 2-го порядка относительно $\zeta_i$, $\zeta_s$, причем $|\varphi_i(\zeta_p^*, t) - \varphi_i(\zeta_p, t)| \leqslant L_1 \sum_{p=1}^{n} |\zeta_p^* - \zeta_p| +$ $+ L_2 \sum_{p=n+1}^{m} |\zeta_p^* - \zeta_p|$, 2) $a_{ip}$ непрерывны по времени и ограничены для $t_0 \leqslant t < \infty$, 3) $\int_0^t \sum_{s=1}^{n} |G_{is}(t, s)| ds < K$, причем $KL_1 n < 1$, а $G_{is}(t, s)$ — функции Грина для системы $\dot{\zeta}_i = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \zeta_p$, $i = 1, \ldots, n$ (функциями Грина автор называет функции, позволяющие заменить рассматриваемую систему системой $\zeta_i = \int_0^t \sum_{p=1}^{n} G_{ip} \varphi_p \, ds$), то

интеграл $\zeta_i \equiv 0$, $i = 1, \ldots n$, и будет устойчив при постоянно действующих возмущениях.

Чтение работы затруднено обилием опечаток. *С. А. Стебаков*

**5120. Теоремы о неосцилляции и теоремы сравнения для линейных дифференциальных уравнений с комплекснозначными коэффициентами.** Там Цой-так (Nonoscillation and comparison theorems of linear differential equations with complex-valued coefficients. Taam Choy-Tak), Portug. math., 1953, **13**, 57—72 (англ.)

Ранее опубликованные исследования автора (Duke Math. J., 1952, **19**, 493—497) по вопросу об осцилляции решений уравнения

$$W'' + Q(x)\,W = 0 \qquad (1)$$

распространены на случай комплекснозначной функции $Q(x) = q_1(x) + iq_2(x)$. Автор доказывает сперва, что уравнение (1) «disconjugate» на интервале $I$, если существуют такая вещественная функция $m(x)$, абсолютно непрерывная на любом замкнутом подинтервале $I$, и такая вещественная постоянная $k$, что

$$m'(x) + m^2(x) \leqslant -(q_1(x) + kq_2(x))$$

почти всюду на $I$. Используя этот критерий, подобно Уинтнеру (Amer. J. Math., 1951, **73**, 368—380), можно получить много результатов; большинство из них сводится к ранее известным результатам, когда функция $Q(x)$ вещественна; см. Уинтнер (выше цит.) и Борг (там же, 1949, **71**, 67—70). Показано также, что если $q_1(x) + kq_2(x) \leqslant f(x)$ и уравнение $y'' + f(x)\,y = 0$ «disconjugate» на $I$, то и уравнение (1) «disconjugate» на $I$; это приводит к обобщениям теорем Хартмана и Уинтнера (там же, 1951, **73**, 885—890) и Хилле (Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **64**, 234—252). *G. E. H. Reuter*

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 837.

Примечание редакции. Дифференциальное уравнение $y'' + f(x)\,y = 0$ с вещественным коэффициентом $f(x)$ называется «disconjugate» на интервале $I$, если любое его нетривиальное вещественное решение имеет на этом интервале не более одного нуля.

**5121. Наследственные бушующие динамические системы.** Фогель (Systèmes dynamiques héréditaires à déferlement. Vogel Théodore), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1953, 22, № 1, 64—80 (франц.)

Динамические системы, характеризующиеся резким изменением закона движения, автор называет «бушующими». Рассматриваются динамические системы, изменение которых описывается движением точки на фазовой плоскости $x$, $y$, где задана некоторая кривая $T$, ограничивающая область $D$. Первоначально координаты точки $P(x, y)$, движущейся в $D$, связаны уравнением

$$\frac{dx}{X_1(x, y)} = \frac{dy}{Y_1(x, y)}. \qquad (1)$$

Если в некоторый момент точка $P(x, y)$ попадает на $T$, то закон движения меняется скачком, и, начиная с этого момента, координаты $P$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{dx}{X_2(x, y)} = \frac{dy}{Y_2(x, y)}. \qquad (2)$$

Если при дальнейшем движении $P$ снова попадает на $T$, то закон изменения $x$, $y$ становится первоначальным и т. д. Функции $X$, $Y$ предполагаются достаточно гладкими (полиномами).

Пусть $R(x, y) = \text{const}$ и $S(x, y) = \text{const}$ семейства траекторий систем (1) и (2) соответственно. Относительно $D$ всякая точка на $T$ для семейства $R = \text{const}$ является либо притягивающей, либо отталкивающей в зависимости от знака члена $dt$, не написанного в уравнениях (1), (2), который, однако, предполагается заданным. Исключение составляют лишь точки, где направления $T$ и $R$ совпадают. Аналогичная картина имеет место для семейства $S$.

Пусть $P$, следуя внутри $D$ по $R$ (или по $S$), подходит к граничной точке, отталкивающей для $S$ (или $R$), тогда она пойдет обратно внутрь $D$ по $S$ (или $R$ соответственно). Если эта картина повторяется в каждой следующей граничной точке, то такое движение называется «бушующим». Бушующая траектория называется циклической $n$-го рода, если после прохождения $n$ дуг $R$ и $n$ дуг $S$ точка $P$ возвращается на свое первоначальное место.

В статье исследуются существование и устойчивость периодических бушующих траекторий. Возможность существования колебания $n$-го рода определяется особенностями $R$ и $S$ в замкнутой области $D$. Рассматриваются десять случаев комбинаций по две следующих особенностей: $O$ — отсутствие особенностей, $N$ — узел, $X$ — седло, $C$ — центр. Приводятся иллюстрации, характеризующие возможные случаи расположения периодических решений. Бушующие колебания, вообще говоря, являются предельными циклами, которые достигаются приближающимися к ним траекториями за бесконечное время, кроме случаев, когда на $T$ имеется узел для $R$ или $S$. В последнем случае периодический режим возникает после первого бушевания (см. РЖМат, 1953, № 1185).

Приводится электрическая схема, составленная из двух систем, характеризующихся различными уравнениями, и органа $T$, переключающего ток, когда заданная функция двух напряжений $x$, $y$ обращается в нуль. Экспериментальные осциллограммы подтверждают выводы теории.

Бушующие системы можно включить в класс более общих «наследственных» систем, которые описываются интегро-дифференциальными уравнениями. Для этого уравнения (1) и (2) следует объединить в одно уравнение

$$\frac{dx}{X_1 + (X_2 - X_1)\int df} = \frac{dy}{Y_1 + (Y_2 - Y_1)\int df}, \qquad (3)$$

где интеграл понимается в смысле Стилтьеса и $f(p) = 0$ при $p$ вне $T$ и $f(p) = \pm 1$ для точек $p$ на $T$ отталкивающего и притягивающего типа соответственно. Рассматриваются примеры преобразования бушующей системы (3) в наследственную с непрерывной функцией $f$ путем непрерывного распространения разрывной функции $f$ в окрестности кривой $T$.

Подробных доказательств высказанных в статье утверждений не приводится. *Н. Н. Красовский*

**5122. Новые критерии существования периодических решений для уравнений вынужденных не-**

**линейных колебаний. Халанай** (Noi criterii de existenţă a soluţiilor periodice pentru ecuaţia oscilaţiilor neliniare forţate. Halanay A.), Bul ştiinţ. Acad. R. P. Române. Sec. mat. şi fiz.,1953, **5**, № 2, 373—381 (рум.; резюме русск., франц.)

Доказаны следующие теоремы:

1. Уравнение $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=e(t)$, где $f$, $g$, $e$ непрерывны, $e(t)$ периодическая, $|e(t)|<E$, имеет периодическое решение, если а) существуют такие $x_0$ и $x_1>x_0$, что $g(x_0)=-E$, при $x>x_0$ $g(x)>-E$, при $x>x_1$ $g(x)-E>k>0$ и для $x_0<x<x_2$ $F(x)\geqslant\sqrt{8G(x)}$, где $F(x)=\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx$,

$$G(x)=\int\limits_{x_0}^{x}(g(x)+E)\,dx,\quad x_2=x_1+\frac{L^2}{k},$$

$$L=2M'+\frac{E+M}{M'}(x_1-x_0),$$

$M$ и $M'$ — максимумы $|g(x)|$ и $|F(x)|$ на отрез $[x_0, x_1]$.

2. То же справедливо, если а) заменить условием б) $g(x_0)=-E$, $g(x_1)=E$, и при $x_0\leqslant x\leqslant x_1$ $|g(x)|<E$, $F(x)\geqslant\sqrt{8G(x)}$, $F_1(x)\geqslant\sqrt{8G_1(x)}$, где $F$ и $G$ те же, что в а), $F_1(x)=\int\limits_{x}^{x_1} f(x)\,dx$, $G_1(x)=\int\limits_{x}^{x_1}(E-g(x))\,dx$.

В формулировке основной теоремы (стр. 375) напечатано $x_2<x_1+\frac{L^2}{k}$, должно быть $x_2=x_1+\frac{L^2}{k}$.

Теоремы доказаны известным методом — путем построения области, из которой решения не выходят, и применением принципа неподвижной точки. Отличие этих теорем от ранее имевшихся критериев существования периодических решений состоит в том, что не налагаются никакие условия на поведение функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x\to\pm\infty$; зато вводится условие $F(x)\geqslant\sqrt{8G(x)}$, означающее, что «коэффициент трения» $f(x)$ настолько велик, что для уравнения $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=-E$ не могут существовать даже затухающие колебания около положения равновесия с амплитудой $\leqslant x_2-x_0$ в случае а) и $\leqslant x_1-x_0$ в случае б). *А. Ф. Филиппов*

**5123 Д. Об устойчивости характеристичных показателей систем линейных дифференциальных уравнений. Былов Б. Ф.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1954

## УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

**5124. Теоремы о базисе для уравнений в частных производных. Редхеффер** (Basis theorems for partial differential equations. Redheffer Raymond M.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 3, 489—498 (англ.)

Автор исследует форму дифференциального уравнения в частных производных, допускающего линейное многообразие решений. Автором доказывается следующая теорема. Пусть $X=(x_1, \ldots, x_n)$, $V$ — вектор размерности $m$, составленный из некоторых частных производных произвольной функции $U$. Предполагается, что дифференциальное уравнение $F(X, V)=0$ допускает линейное многообразие решений $U_\alpha$, причем соответствующие $V_\alpha$ непрерывны в окрестности точки $X_0$ и порождают в каждой точке этой окрестности линейное многообразие размерности $k$; $F(X, V)$ предполагается непрерывной функцией в окрестности рассматриваемых значений $X$, $V$. Тогда существуют векторы $A_1(X), \ldots, A_{m-k}(X)$, непрерывные и ортогональные в некоторой окрестности $X_0$, и такие непрерывные функции

$$f(t) \text{ и } G(X, V)\ (f(0)=0), \text{ что}$$

$$F(X, V)=f[(A_1, V)^2+\cdots+(A_{m-k}, V)^2]\,G(X, V).$$

В работе содержатся еще некоторые предложения в этом направлении. Указанное ранее истолкование $V$ для доказательства этих теорем не имеет существенного значения. *Я. Б. Лопатинский*

**5125. Об одной задаче Ф. Лея. Гурский** (Sur un problème de F. Leja. Górski J.), Roczn. Polskiego towarz. mat. (Ann. Soc. polon math.), 1952, **25**, 273—278 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (франц.)

Пусть $F$ — ограниченное замкнутое множество трехмерного евклидова пространства, $P_{in}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ — система $n$-«экстремальных» точек множества $F$, для которых сумма

$$\sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}\frac{1}{P_{in}P_{kn}}$$

достигает минимума. Лея (см. Leja F., Ann Soc. polon. math., 1946, **19**, 252) предложил следующую задачу: доказать, что последовательность

$$u_n(P)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{PP_{in}}\quad(n=1, 2, \ldots) \tag{1}$$

сходится всюду вне $F$ (или показать, что это утверждение неверно).

Тересака (Teresaka H., Ann. Soc. polon. math., 1950, **23**, 201—204) построил пример счетного множества $F$, для которого последовательность (1) расходится в некоторых точках $P$. В работе показывается, что если множество $F$ есть граница бесконечной области $D_\infty$ и его трансфинитный диаметр в смысле Пойа и Сегё положителен, то последовательность (1) сходится всюду вне $F$ к гармонической функции $u(P)$.

Далее утверждается без доказательства, что и $u(P)$ есть решение задачи Дирихле для области $D_\infty$ с постоянными граничными значениями на $F$ и на основании этого делается попытка вывести необходимые и достаточные условия регулярности точек границы $F$. *Б. И. Коренблюм*

**5126. О вычислении емкости куба. Кейхилл, Дейвис** (On a computation of the capacity of a cube. Cahill W. F., Davis Philip), Math. Tables and other Aids Comput., 1953, **7**, № 44, 272—273 (англ.)

Пусть $M$ есть область трехмерного пространства и $C$ — ее емкость. Пойа и Сегё (Pólya G., Szegö G.,

J. reine und angew. Math., 1931, 165, 4—49) установили, что

$$C = \lim_{n\to\infty} \min_{P_k \in M} \max_{P \in M} \left\{ \frac{n}{\sum_1^n |PP_k|^{-1}} \right\},$$

где $|PP_k|$ — расстояние между точками $P$ и $P_k$.

В реферируемой заметке приводится результат подсчета $\min\limits_{P_k} \max\limits_{P} \left\{ \frac{n}{\sum_1^n |PP_k|^{-1}} \right\}$ при $n = 8, \ldots, 50$ выборах точек $P$ для каждого из 250 выборов совокупностей $(P_1, \ldots, P_8)$. Подсчет потребовал вычисления $10^5$ расстояний и производился машиной СЕАК (SEAC) в течение 3 час. Полученный минимакс $C = 0{,}6835$, что, по мнению авторов, хорошо согласуется с результатом Гросса (Gross W., Atti Accad. naz. Lincei. Rend., Cl. sci. fis., mat. e natur., 1952, 12, 496—506):

$$C = 0{,}6464 \pm 0{,}032.$$

Отметим, что 0,6835 выходит из промежутка, указанного Дабони для емкости куба (PhMat, 1954, 4428). *Х. Л. Смолицкий*

**5127. Об одной смешанной задаче теории упругости для плоскости, ослабленной прямолинейной щелью. Моссаковский В. И., Загубиженко П. А.**, Докл. АН СССР, 1954, 94, № 3, 409—412

Рассматривается бесконечная пластина, ослабленная прямолинейной щелью малой ширины $\delta$, нагруженная в своей плоскости сжимающими силами $p$, направленными под углом $\beta$ к линии щели. Действие сил $p$ приводит к соприкосновению кромок щели на некотором среднем участке. На участке контакта $(-\alpha, \alpha)$: $Y^+ = Y$, $X_y^+ = X_y^- = 0$, $v^+ - v^- = \delta$. На свободных участках: $Y^+ = Y^- = 0$, $X_y^+ = X_y^- = 0$.

По известному методу Мусхелишвили задача сводится к определению двух аналитических функций комплексного переменного $z$:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{X(t)\, p(t)\, dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q(t)\, dt}{t - z} + \frac{P_n(z)}{X(z)} - \frac{1}{2}\Gamma';$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_L \frac{X(t)\, p(t)\, dt}{t - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{q(t)\, dt}{t - z} + \frac{P_n(z)}{X(z)} + \frac{1}{2}\Gamma';$$

где

$$p(t) = \frac{1}{2}\left[Y_y^+ + Y_y^-\right] - \frac{i}{2}\left[X_y^+ + X_y^-\right],$$

$$q(t) = \frac{1}{2}\left[Y_y^+ - Y_y^-\right] - \frac{i}{2}\left[X_y - X_y^-\right],$$

$$X(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - a_k)^{1/2} (z - b_k)^{1/2} = \sqrt{z^2 - a^2}$$

и $P_n(z)$ — полином, определяющийся условиями ограниченности напряжений на бесконечности.

После использования условий на бесконечности и граничных условий функции $\Phi$ и $\Omega$ приводятся к виду

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sqrt{t^2 - a^2}\, p(t)\, dt}{t - z} + \frac{\left(\Gamma + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}'\right) z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - \frac{1}{2}\bar{\Gamma}';$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{z^2 - a^2}} \int_{-\alpha}^{+\alpha} \frac{\sqrt{t^2 - a^2}\, p(t)\, dt}{t - z} + \frac{\left(\Gamma + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}'\right) z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{1}{2}\bar{\Gamma}'.$$

Определяются компоненты напряжений и смещений на контуре щели. Даются выражения для давления $p(t)$ на участке контакта $(-\alpha, +\alpha)$ и длина участка контакта $(-\alpha, +\alpha)$. *К. В. Соляник-Красса*

## ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

**5128. Линеаризация позиционной силы методом кусочно-линейной аппроксимации. Гоппе Ю. А.**, Инж. сб., 1954, 18, 149—152

Для уравнения

$$\ddot{x} + F(x) = 0$$

предлагается метод приближенного вычисления частоты колебаний, заключающийся в том, что кривая $y = F(x)$ заменяется подходящим образом выбранными отрезками прямых. *И. Г. Малкин*

**5129. Некоторые связанные проблемы колебаний. Данкан** (Some related oscillation problems. Duncan W. J.), Aeronaut. Res. Council. Repts and Mem.), 1953, № 2707, 1—12 (англ.)

К уравнению собственных изгибных или крутильных колебаний стержня

$$f(D)\, u - \omega^2 u = 0 \qquad (D = d/dx)$$

применяется линейный дифференциальный оператор $\Phi(D)$, коммутирующий с $f(D)$; в результате получается новая краевая задача, смысл которой устанавливается из анализа граничных условий. Таким путем обнаруживаются эквивалентные краевые задачи, имеющие равные отличные от нуля частоты. Бо́льшая часть из них широко известна (балка, заделанная по концам, и стержень со свободными концами; балка, несущая сосредоточенную массу, и балка с упругой опорой и т. п.); (следует отметить, что возможности применения указанного приема ограничены кругом простейших задач: так, в случае стерж-

ней переменного сечения коммутативность операторов $f(D)$ и $\Phi(D)$, вообще говоря, не выполняется). *В. В. Болотин*

**5130. О применении тригонометрических рядов к задачам расчета пластинок и оболочек. Трухлов А. М.,** Тр. Саратовского автомоб.-дор. ин-та, 1953, № 12, 224—228

Решаются краевые задачи для уравнения $EIy^{IV} = q(x)$ путем формального применения расходящихся тригонометрических рядов (см., например, ряд 8). *Ф. В. Широков*

**5131. О некоторых исключительной трудности задачах на собственные значения, иллюстрированных на случае упругой неустойчивости. Саутуэлл, Вейси** (On some eigenvalue problems of exceptional difficulty, exemplified by a case of elastic instability. Southwell R. V., Vaisey Gillian), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1953, **6**, ч. 4, 453—480 (англ.)

Более подробное изложение результатов предыдущей статьи первого автора (РЖМат, 1954, 3381). Эти результаты поясняются на задаче об устойчивости тонких упругих пластин. *С. Г. Михлин*

**5132. Математическая теория течения газа в пористом теле и соответствующего распределения температуры. Бланд** (Mathematical theory of the flow of a gas in a porous solid and of the associated temperature distributions. Bland D. R.), Proc. Roy. Soc., 1954, **A221**, № 1144, 1—28 (англ.)

Изучаются течение газа и закон распределения температуры в пористой среде при следующих предположениях. 1. Разность проводимого телом тепла и увеличения его теплосодержания равна теплу, передаваемому газу, или потере тепла газом вследствие перемещения. 2. Известный закон Дарси о зависимости между скоростью течения $\mathbf{v}$ и градиентом давления $p$ при постоянной температуре принимается справедливым и для произвольного распределения температур в газе. На основании этих предположений из уравнения неразрывности $\operatorname{div} \rho\mathbf{v} = 0$ и уравнения состояния идеального газа выводится следующая система дифференциальных уравнений теплового состояния:

$$\gamma\nabla^2 U - K\partial U/\partial t = \frac{1}{\lambda} |\operatorname{grad} p^2| (U - T)/T =$$

$$= -\frac{1}{T}\operatorname{grad} p^2 \operatorname{grad} T = -\nabla^2 p^2, \qquad (1)$$

где $\lambda, \gamma, K$ — постоянные, зависящие от вязкости и теплоемкости газа, коэффициента фильтрации, коэффициента теплопроводности и пористости тела. Искомыми являются $p$, $U$ — температура тела и $T$ — температура газа. Граничными условиями могут быть задания $U$ и $p$ на поверхности тела и задание $T$ на части поверхности или эквивалентные этим другие условия. В начальный же момент должны быть заданы все искомые величины. После решения системы (1) $\rho$ и $\mathbf{v}$ определяются через $p$ и $T$ из уравнения состояния газа и закона Дарси.

Решение системы (1) проводится в частных случаях. Если имеется одномерное течение, а также радиальное течение внутри цилиндра или сферы, то искомые функции будут зависеть только от времени $t$ и расстояния $r$ от плоскости, оси цилиндра или центра сферы. В этих случаях система (1) сильно упрощается, и для стационарного течения задача приводится к решению обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

В случае стационарного осесимметричного течения внутри цилиндра операторы $\nabla^2$ и grad в системе (1) зависят только от $r$ и $z$. В случае граничных условий: на боковой поверхности цилиндра $U = \text{const}$, $v_2 = 0$, $\partial p/\partial r = 0$, на нижнем основании $p = \text{const}$, $dU/dz = 0$, а на верхнем $T = \text{const}$, $p = \text{const}$ даются численное решение уравнения (1) и соответствующие таблицы.

Наконец, рассматривается нестационарное одномерное течение газа, обусловленное передачей тепла от одного газа к другому посредством пористого тела. В этом случае упрощенное уравнение, полученное из (1), решается способом Фурье. Зависимость течения от времени принимается периодической, на границе задается $\partial U/\partial z = 0$ и некоторая линейная комбинация $U$, $\partial U/dz$ и $\partial^2 U/\partial z^2$. Исследуется также осредненное в единицу времени значение передаваемого тепла. Этот случай также снабжен таблицами. *Д. Е. Долидзе*

**5133. Двумерный стационарный поток, наложенный на источник, сток или диполь. Пракаш** (Two dimensional steady flows superposable on a source, sink or doublet. Prakash Prem), Bull. Calcutta Math. Soc., 1953, **45**, № 2, 51—54 (англ.)

Показывается, что если $u$, $v$ — компоненты вектора скорости плоского стационарного движения вязкой жидкости при массовых силах, имеющих потенциал, такие, что удовлетворяются условия

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\zeta\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{x^2+y^2}\zeta\right] = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\zeta\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{xy}{(x^2+y^2)^2}\zeta\right] = 0,$$

где $\zeta = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial x}$ (Ram Ballabh, Proc. Benares Math. Soc., 1940, **2**, 70), то $\zeta = 0$, т. е. движение, определяемое вектором $(u, v)$, будет безвихревым. *Г. Н. Положий*

**5134. Интенсивность и поляризация при дифракции электромагнитных волн на щели. II. Хенль, Циммер** (Intensität und Polarisation bei der Beugung elektromagnetischer Wellen am Spalt. II. Hönl H., Zimmer Eva), Z. Physik, 1953, **135**, № 2, 196—218 (нем.)

В работе исследуется дифракция плоской электромагнитной волны на щели в предположении, что падающая волна распространяется перпендикулярно к экрану, а магнитный вектор в ней параллелен щели. Задача состоит в отыскании функции $H_y(x, z)$, удовлетворяющей волновому уравнению

$$\Delta H_y + k^2 H_y = 0, \qquad (1)$$

краевому условию

$$\frac{\partial H_y}{\partial z}(x, 0) = 0 \text{ при } |x| > b, \qquad (2)$$

условию излучения Зоммерфельда и условию Мейкснера на ребре.

Авторы ищут решение поставленной задачи в виде интеграла Фурье

$$H_y = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\, e^{ik(\alpha x+\gamma z)}\, d\alpha, & z \geqslant 0, \\ e^{ikz} + e^{-ikz} - \int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\, e^{ik(\alpha x-\gamma z)}\, d\alpha, & z \leqslant 0, \end{cases}$$

где

$$\gamma = +\sqrt{1-\alpha^2} \text{ при } |\alpha| \leqslant 1$$

$$\gamma = +i\sqrt{\alpha^2-1} \text{ при } |\alpha| > 1,$$

автоматически удовлетворяющего уравнению (1) и дополнительным условиям Зоммерфельда и Мейкснера.

Из граничного условия (2) и требования непрерывности полей внутри щели получаются интегральные уравнения для $h(\alpha)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(\alpha)\, h(\alpha)\, e^{ik\xi\alpha}\, d\alpha = 0 \text{ при } |\xi| > b \qquad (3a)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha)\, e^{ik\xi\alpha}\, d\alpha = 1 \text{ при } |\xi| < b \qquad (3б)$$

$\gamma(\alpha)\, h(\alpha)$ ищется в виде ряда

$$\gamma(\alpha)\, h(\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} B_m J_{2m}(k\xi\alpha), \qquad (4)$$

каждый член которого в силу известной формулы Сонина удовлетворяет уравнению (3$a$). Коэффициенты $B_m$ определяются из того требования, чтобы ряд (4) удовлетворял уравнению (3$б$). Если считать, что величина $\varepsilon = kb \ll 1$ и искать коэффициенты $B_m$ в виде разложения по этому малому параметру, то с точностью до величин второго порядка малости относительно $\varepsilon$ получаем

$$B_0 = \frac{1}{2i(\ln\varepsilon + a)}\left\{1 + \frac{\varepsilon^2}{4}\left(1 + \frac{7}{16}\frac{1}{\ln\varepsilon + a}\right) + \dots\right\},$$

$$B_1 = \frac{i\varepsilon^2}{8}\left\{1 + i\frac{15}{16}\frac{1}{\ln\varepsilon + \alpha} + \dots\right\}, \quad B_2 = B_3 = \dots = 0.$$

Рассмотренный выше случай авторы называют магнитным (магнитное поле параллельно щели). В работе также приводятся результаты для электрического случая, полученные аналогичным методом в более раннем исследовании (Groschwitz E., Hönl H., Z. Physik, 1952, **131**, 305).

Пользуясь полученными результатами, авторы исследуют интенсивность и поляризацию дифрагированной волны, предполагая при этом, что $\varepsilon \ll 1$.

Рассматривается два наиболее интересных случая: 1) падающая волна полностью поляризована, и 2) падающее излучение неполяризовано. В дифрагированной волне будет преобладать поле с электрическим вектором, перпендикулярным к щели (магнитный случай). Следует отметить, что разобранный авторами случай малых $\varepsilon$ не может быть исследован с помощью теории Френеля — Кирхгоффа.

*Д. П. Костомаров*

**5135. Диффракция акустических волн на маленьком круглом отверстии.** А н д е р с (Beugung akustischer Wellen an einer kleinen kreisförmigen Öffnung. A n d e r s T i l l), Z. Physik, 1953, **135**, № 2, 219—224 (нем.)

Пусть в плоскости $z = 0$ лежит экран с круглым отверстием радиуса $R$. Из полупространства $z < 0$ перпендикулярно к экрану распространяется плоская акустическая волна. Волновое поле можно описать потенциалом скоростей $u(x, y, z)$, который удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta u + k^2 u = 0 \qquad (1)$$

и краевому условию

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, y, 0) = 0 \quad \text{при } \sqrt{x^2+y^2} > R.$$

К этому еще нужно добавить условие излучения Зоммерфельда на бесконечности.

Применяя метод, развитый Хёнлом (Hönl H., Z. Physik, 1952, **131**, 290; реф. 5135), автор ищет решение в виде интегралов Фурье

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha, \beta)\, e^{ik(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\, d\alpha\, d\beta, \quad z > 0,$$

$$u = e^{ikz} + e^{-ikz} - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(\alpha, \beta)\, e^{ik(\alpha x+\beta y-\gamma z)}\, d\alpha\, d\beta, \quad z < 0,$$

где

$$\gamma = +\sqrt{1-(\alpha^2+\beta^2)} \text{ при } (\alpha^2+\beta^2) < 1$$

$$\gamma = +i\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)-1} \text{ при } (\alpha^2+\beta^2) > 1,$$

автоматически удовлетворяющих уравнению (1) и условию излучения.

Из краевого условия и требования непрерывности функции $u$ и ее производной $\frac{\partial u}{\partial z}$ внутри отверстия получаем интегральные уравнения для $h(\alpha, \beta)$, которые в сферических координатах ($\alpha = \sin\theta\cos\varphi$, $\beta = \sin\theta\sin\varphi$, $\gamma = \cos\theta$, $x = r\cos\psi$, $y = r\sin\psi$) запишутся следующим образом:

$$\int_0^{\infty} d\rho \oint d\varphi\rho h(\rho)\, e^{ik\rho r\cos(\psi-\varphi)} = 1, \quad 0 < r < R \qquad (2a)$$

$$\int_0^{\infty} d\rho \oint d\varphi\rho\sqrt{1-\rho^2}\, h(\rho)\, e^{ik\rho r\cos(\psi-\varphi)} = 0, \quad R < r < \infty. \qquad (2б)$$

Функция $h(\rho)$ ищется в следующем виде:

$$\rho\sqrt{1-\rho^2}\, h(\rho) = \sum_{\varkappa} C_{\varkappa}\, \rho^{1/2} J_{2\varkappa+\frac{1}{2}}(kR\rho).$$

Каждое слагаемое этого ряда в силу известной формулы Сонина удовлетворяет уравнению (2б). Коэффициенты $C_\varkappa$ определяются из условия удовлетворения уравнения (2а).

При $\delta = kR \ll 1$ автор получает

$$C_0 = i\frac{1}{\pi^{3/2}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}},\quad C_\varkappa = 0,\quad \varkappa = 1, 2, 3\ldots$$

На основании построенного решения автор приходит к следующему выражению для компоненты $v_z$ в отверстии:

$$v_z = -\frac{2k}{\varepsilon\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{r^2}{R^2}}}.$$

*Д. П. Костомаров*

**5136. О звуковых волнах конечной амплитуды. Копсон** (On sound waves of finite amplitude. Copson E. T.), Proc. Roy. Soc., 1953, **A216**, № 1127, 539—547 (англ.)

Решение задачи об одномерном распространении звуковых волн в газе, удовлетворяющем адиабатическому закону $p = \varkappa\rho^\gamma$, после выбора в качестве аргументов так называемых инвариантов Римана $r$, $s$ и введения вспомогательной функции $w(r, s)$ сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial s} + \frac{N}{r+s}\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial s}\right) = 0$$
$$\left(r + s \geqslant 0, N = \frac{3-\gamma}{2\gamma-2}\right). \qquad (1)$$

При этом, если начальные скорости равны нулю, то краевое условие имеет вид

$$\partial w/\partial r\,|_{r=s} = -\,\partial w/\partial s\,|_{r=s} = x_0(r). \qquad (2)$$

Ранее было известно общее решение уравнения (1) при натуральном $N$. Здесь показывается, что если функция $\varphi(z)$ регулярна в окрестности вещественной оси, а контур $C$ охватывает точки 0, $r$ и $-s$, то при любом $N$ функция

$$w(r,s) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^{2N}\varphi(z)}{(z-r)^N(z+s)^N}\,dz$$

удовлетворяет уравнению (1). Краевое условие вида 2) удовлетворяется тогда и только тогда, когда функция $\varphi(z)$ четная; оно приводит к интегральному уравнению абелевого типа

$$x_0(r) = \frac{N}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{z^{2N+1}\varphi(z)}{(z^2-r^2)^{N+1}}\,dz \qquad (3)$$

(контур $C$ охватывает точки $0$ и $\pm r$). Последнее уравнение имеет решение только, если функция $x_0(r)$ как функция комплексного переменного $r$ четна и регулярна в окрестности вещественной оси. При $N>0$ это решение имеет вид

$$\varphi(z) = 2\int_0^1 (1-\lambda^2)^{N-1}\lambda x_0(z\lambda)\,d\lambda \qquad (4)$$

(в работе показан переход только от (3) к (4), но не наоборот. *Прим. реф.*). В качестве примера разобрано распространение газового облака в пустоту, причем для случая $N = 1$ получаются результаты, доказанные Мартином (Martin M. H., Amer. J. Math., 1943, **55**, 391—407), Мак-Витти (McVittie G. C., Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1950, **110**, 224 — 237) и автором (там же, 238—246). *А. Д. Мышкис*

**5137. Двумерное температурное поле в плоском ребре конечной высоты. Эйгенсон Л. С.**, Тр. Всес. заочн. энергетич. ин-та, 1953, № 2, 65—70

**5138 РЖ. Математическая теория неоднородных газов. Чапман, Каулинг** (The mathematical theory of non-uniform gases, 2-nd ed. Chapman S., Cowling T. G., XXIII + 431 pp., University Press, Cambridge, 1952, 60 s.) [**Рецензия: Ферт** (Furth R.), Proc. phys. soc., 1953, **A66**, ч. 12, № 408, 1197 (англ.)]

**5139 Д. О спектре несамосопряженного дифференциального оператора $-\Delta u + cu$ в неограниченной области многомерного пространства. Мартиросян Р. М.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т им. Стеклова, М., 1954

**5140 Д. О некоторых краевых задачах гидродинамики и теории упругости и их решении методом интегральных уравнений. Сухаревский И. В.**, Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Харьковский гос. ун-т, Харьков, 1954

---

**См. также:** 5100, 5106, 5117, 5142, 5155 **К**, 5162 **К**, 5167, 5218, 5245, 5257, 5258, 5259, 5260, 5261, 5281Д

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**5141. Связь между характеристическими и особыми значениями линейных интегральных уравнений. Чжан Ши-сюнь** (線性積分方程之特值及奇值間之一關係及其推論. 張世勛), 數學學報, (Шусюэ сюэбао), 1953, **3**, № 3, 200—207 (кит.; резюме англ.)

Пусть ядро $K(x, y)$ принадлежит $L^2$, так что

$$\int_a^b\int_a^b |K(x,y)|^2\,dx\,dy < \infty.$$

Рассматриваются два вида собственных значений,

связанных с $K(x, y)$, — характеристические значения и особые значения. Характеристические значения $K(x, y)$ — это комплексные числа $\mu$ такие, что

$$\varphi(x) = \mu \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy \text{ или } \varphi(x) = \mu K\varphi[x]$$

$$\varphi \in L^2[a, b]; \quad \varphi \not\equiv 0.$$

Особые значения $K(x, y)$ — это неотрицательные действительные числа $\lambda$ такие, что $\lambda^2$ являются характеристическими значениями

$$KK'[x, y] = \int_a^b K(x, \xi)\,\overline{K(y, \xi)}\,d\xi.$$

Располагая $\mu$, а также $\lambda$ обычным способом так, что

$$|\mu_1| \leqslant |\mu_2| \leqslant \ldots \text{ и } \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots,$$

имеем неравенство

$$\lambda_1 \leqslant |\mu_1| \qquad (1)$$

и его непосредственное следствие

$$\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n \leqslant |\mu_1\mu_2 \ldots \mu_n| \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (2)$$

(1) и (2) были доказаны автором статьи в 1949 г. (Chang S. H., Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, 871—873).

Теорема. Для каждой функции $K(x, y)$ из $L^2$ существует разложение определителя $n$-го порядка $\det|K(s_i, t_j)|$ по крайней мере на $2n$ множителя в том смысле, что

$$\det|K(s_i, t_j)| = K_1K_2 \ldots K_{2n}(S, T),$$

где $K_1K_2(S, T)$ означает

$$\int_a^b\int_a^b K_1(s_1, s_2, \ldots, s_n;\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\,K_2(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n;$$

$$t_1, t_2, \ldots, t_n)\,d\xi_1\,d\xi_2 \ldots d\xi_n$$

$K_1K_2K_3(S, T)$ означает $(K_1K_2)K_3(S, T)$ и т. д., и каждый множитель $K_i(S, T)$ принадлежит $L^2$, так что

$$\int_a^b \ldots \int_a^b |K_i(s_1, \ldots, s_n; t_1, \ldots, t_n)|^2\,ds_1 \ldots$$

$$\ldots ds_n\,dt_1 \ldots dt_n < \infty.$$

Если кроме того предположить, что

$$\frac{\partial^\rho K(x, y)}{\partial x^\rho} \quad (\rho = 0, 1, \ldots, p)$$

непрерывны, то имеется разложение определителя $\det|K(s_i, t_j)|$ $n$-го порядка по крайней мере на $2pn$ множителей

$$\det|K(s_i, t_j)| = K_1K_2 \ldots K_{2np}(S, T),$$

где каждый $K_i(S, T)$ принадлежит $L^2$.

Из резюме автора

**5142. Возрастание температуры в твердом теле, являющемся источником тепла, позади поверхностного дефекта. Трантер** (Temperature rise in a heat-producing solid behind a surface defect. Tranter C. J.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, 24, № 3, 369 (англ.)

В заметке рассматривается задача о распространении тепла в полупространстве $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, $z \geqslant 0$ (причем тепло истекает из тела через границу $z = 0$ с постоянным отношением количества тепла на единицу площади, равным $g$). Если, кроме того, задана теплоизолированная полоса $z = 0$ $-a \leqslant x \leqslant a$, $-\infty < y < +\infty$ и коэффициент теплопроводности $k$, то задача сводится к нахождению температуры $T(x, z)$, являющейся функцией, гармонической в области $-\infty < x < +\infty$; $z > 0$, стремящейся к нулю при $z \to \infty$ и удовлетворяющей краевым условиям при $z = 0$:

$$-k\frac{\partial T}{\partial z} = g \quad \text{при } x^2 < a^2$$

$$T = 0 \quad \text{при } x^2 > a^2.$$

Решение $T(x, z)$ ищется в виде

$$T(x, z) = \int_0^\infty f(t)\cos(tx)\,e^{-tz}\,dt,$$

где $f(t)$ является решением «пары» интегральных уравнений

$$k\int_0^\infty t\,f(t)\cos(tx)\,dx = g \quad \text{для } x^2 < a^2$$

$$\int_0^\infty f(t)\cos(tx)\,dt = 0 \quad \text{для } x^2 > a^2,$$

исследованной Титчмаршем (Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, М.— Л., 1948 423—429).

Окончательно $f(t) = \frac{ga}{k} \cdot \frac{J_1(at)}{t}$.

Этот результат не является оригинальным, будучи частным случаем более общих результатов, полученных, как отмечает сам автор, другим методом (Karush W., Young G., J. Appl. Phys., N. Y., 1952, 23, 1191). *Л. И. Камынин*

**5143. К вопросу о волнообразовании при движении корабля. Костюков А. А.,** Прикл. матем. и механика, 1953, 17, № 3, 275—284

Исследуется интегральное уравнение Н. Е. Кочина в теории волнового сопротивления при малых или очень больших скоростях движения тела, погруженного в жидкость. Устанавливается разрешимость этого уравнения, полученная ранее другим методом Н. Е. Кочиным (Кочин Н. Е., Полное собрание сочинений, т. 2, изд. АН СССР, 1949, 105—182). Подробно рассматривается случай судна-цилиндра с бесконечной осадкой с ватерлинией в виде параболы. Приводятся числовые примеры. Метод исследования разрешимости интегрального уравнения — метод преобразования параметра интегрального уравнения (Гурса Э., Курс математического анализа, т. 3, ч. 2, Гостехиздат, М.—Л., 1934, 174). *Г. Н. Положий*

**5144. Общая теория передачи по распределенным спиральным линиям задержки с шунтирующими емкостями. Ди Торо** (General transmission theory of distributed helical delay lines with bridging capacitance. Di Toro M. J.), Conven. Rec. Inst. Radio Engrs, 1953, 5, 64—70 (англ.)

Изучаемый процесс передачи описывается системой интегро-дифференциальных уравнений

$$-\frac{dV(x)}{dx} = j\omega L_0 \int_{-\infty}^{\infty} m(y)\, I(x+y)\, dy \qquad (1)$$

$$-\frac{dI(x)}{dx} = j\omega C\left[V(x) + \int_{-\infty}^{\infty} c(y)\,[V(x) - V(x+y)]\, dy\right],$$

где $V(x)$ — вольтаж, $I(x)$ — сила тока, $m(y)$ и $c(y)$ — заданные функции, $L_0$ и $C$ — некоторые параметры. Решения системы (1) ищутся в виде $V(x) = A\exp(-j\omega x/v)$, $I(x) = (A/Z)\exp(-j\omega x/v)$, что приводит к некоторым уравнениям для определения фазовой скорости $v$ и характеристического импеданса $Z$. Полученные после подстановки уравнения для $v$ и $Z$ решаются при помощи методов операционного исчисления. *В. В. Немыцкий*

**5145 Д. Обобщенная краевая задача Римана и линейное сингулярное интегро-дифференциальное уравнение. Крикунов Ю. М.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанск. ун-т, Казань, 1954

---

**См. также:** 5127, 5136, 5140 Д, 5163, 5256, 5274

## ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

**5146. Двумерные задачи вариационного исчисления в непараметрической форме, преобразованные к параметрической форме. Сигалов А. Г.,** Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 3, 405—408

Рассматривается задача об абсолютном минимуме интеграла

$$(f, D, F) = \iint_D F(x^1, x^2, f, p, q)\, dx^1\, dx^2,$$

где $F$ непрерывна при $(x^1, x^2) \in \bar{D}$, $|f| < |x_0^3|$ и произвольных $p$, $q$ вместе с $F_p$, $F_q$, причем при $\alpha > 1$ $F \geqslant m(1+p^2+q^2)^{\alpha/2} + B$, при $\alpha = 1$ $m(1+p^2+q^2)^{1/2} \leqslant F \leqslant M(1+p^2+q^2)^{1/2}$ ($m > 0$, $M > 0$, $B$ — постоянные); $f$ принимает заданные значения на границе. Предполагается, кроме того, что $F$ квазирегулярна, т. е. $\mathcal{E}(x, p, q, \bar{p}, \bar{q}) \geqslant 0$.

В ранее опубликованной заметке автора (Докл. АН СССР, 1950, **73**, № 5, 891—894) утверждалось, что при $\alpha > 1$ (и при некоторых дополнительных условиях) существует абсолютно непрерывная в смысле Тонелли функция, решающая задачу об абсолютном минимуме $(f, D, F)$. В реферируемой работе строится пример, показывающий, что при $1 < \alpha < 2$ доказательство в указанной заметке неверно. Далее рассматривается класс $A^{\alpha}_{par}$ поверхностей $T$ в параметрической форме, ограниченных простой жордановой кривой $\Gamma$ и являющихся пределами в смысле Фреше полиэдров $P_n: x^3 = f_n(x^1, x^2)$, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $f_n$ кусочно-линейна в жордановой области $D_n$, $n = 1, 2, \ldots$;

$$\text{b)} \iint_{D_n} \left\{1 + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x^2}\right)^2\right\}^{\alpha/2} dx^1\, dx^2 \leqslant L,$$

$n = 1, 2, \ldots$, $L$ постоянна;

$$\text{c)} \quad \frac{1}{\operatorname{mes} G} \iint_G \left\{1 + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x^2}\right)^2\right\}^{1/2} dx^1\, dx^2 \leqslant q$$

для любой основной области $G$ функции $f_n$ (Успехи матем. наук, 1951, **6**, № 2, 16—101), причем $q$ не зависит от $n$, $G$.

Поверхность $T \in A^{\alpha}_{par}$ имеет «отмеченное» параметрическое представление $x = \varphi(u)$, $u \in K$ ($K$ — квадрат), для которого существует интеграл

$$(\varphi, K, F_1) = \iint_K F_1(\varphi, A^1, A^2, A^3)\, du;$$

здесь $A^i$ — якобианы от $x^1$, $x^2$, $x^3$ по $u^1$, $u^2$, $F_1 = F\left(x(u), -\frac{A^1}{A^3}, -\frac{A^2}{A^3}\right)A^3$. Поверхность $T: x = \varphi(u)$, $T \in A^{\alpha}_{par}$, можно представить в виде $x^3 = f(x^1, x^2)$, где $f$ почти всюду однозначна; полученные таким образом функции $f$ составляют класс $\bar{A}^{\alpha}_{par}$. Если $\alpha > 1$, $|f| < |x_0^3|$, то $(f, D, F) = (\varphi, K, F_1)$; интеграл $(\varphi, K, F_1)$ называется соответствующим $f$.

Допустимые функции $f(x^1, x^2)$ определяются на $\bar{D}$ и удовлетворяют следующим условиям:

A. $f \in \bar{A}^{\alpha}_{par}$, $|f| < |x_0^3|$.

B. Значения $\Psi(x^1, x^2)$ являются граничными для $f$ в том смысле, что точки $(x^1, x^2, \Psi(x^1, x^2))$, $(x^1, x^2) \in D'$ ($D'$ — граница области $D$) лежат на границе поверхности $T_f \in A^{\alpha}_{par}$, определяющей $f$; $\Psi$ непрерывна на $D'$.

C. $(f, D, F) < +\infty$.

D. Существует последовательность кусочно-линейных функций $f_n(x^1, x^2)$, удовлетворяющих условиям a), b), c) и таких, что соответствующие интегралы

$$(\varphi_n, K, F_1) \to (\varphi, K, F_1).$$

Теорема. При $\alpha > 1$ задачи на разыскание в классе допустимых функций минимума интегралов $(f, D, F)$ и $(\varphi, K, F_1)$ равносильны и обе имеют решение, если существуют допустимые функции. При $\alpha = 1$ задача решается лишь в параметрической форме; минимум $(\varphi, K, F_1)$ существует если существуют допустимые поверхности.

Примечание референта. В построенном примере функции $f_n$ не удовлетворяют условию 1 теоремы 3 цитированной заметки; однако можно удовлетворить всем условиям этой теоремы, аппроксимируя $f_n$ кусочно-линейными функциями. На стр. 407, строка 7 снизу, вместо $A_{par}^{-\alpha}$ должно быть $A_{par}^{\alpha}$. *А. И. Фет*

**5147. Абсолютный экстремум интеграла, взятого по бесконечному интервалу. Дарбо** (L'estremo assoluto per gli integrali su intervallo infinito. Darbo Gabriele), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1953, 22, № 2, 399—416 (итал.)

Пусть функция $F(x, y, y')$ непрерывна во всех точках $(x, y, y')$, где $(x, y)$ — любая точка замкнутой области $A$ плоскости $xy$, а $y'$ — любое число.

Кривая с уравнением $y = y(x)$ $(a \leqslant x < +\infty)$ называется допустимой для интеграла

$$I_C^{+\infty} = \int_a^{+\infty} F(x, y, y')\, dx,$$

если: 1) каждая ее точка $(x, y(x))$ принадлежит $A$, 2) на любом конечном сегменте $[a, t]$ функция $y(x)$ абсолютно непрерывна, а $F(x, y(x), y'(x))$ интегрируема по Лебегу, 3) существует конечный интеграл

$$\int_a^{+\infty} F(x, y, y')\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t F(x, y, y')\, dx.$$

Обозначим класс допустимых кривых через $C^{+\infty}$.

По определению, класс допустимых кривых называется полным, если всякая спрямляемая предельная кривая этого класса принадлежит этому же классу. Обозначим через $K$ полный класс допустимых кривых $C^{+\infty}$.

Интеграл $I_C = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$ называется:

а) квазирегулярным, если для всех $(x, y, y')$ имеет место неравенство $F_{y'y'} \geqslant 0$ (положительная квазирегулярность) или $F_{y'y'} \leqslant 0$ (отрицательная квазирегулярность); б) квазирегулярным и полунормальным, если равенство $F_{y'y'}(x, y, y') = 0$ не удовлетворяется ни в какой точке $(x, y) \in A$ при всех значениях $y'$ (Tonelli L., Fondamenti di calcolo delle variazioni, t. 1, Bologna, 1921, 360—361).

Основное содержание реферируемой работы заключается в доказательстве следующего утверждения:

Теорема. Пусть интеграл

$$I_C^{+\infty} = \int_0^{+\infty} F(x, y, y')\, dx \qquad (1)$$

квазирегулярен и полунормален (нижний предел взят равным нулю только для упрощения доказательства теоремы) и пусть интеграл

$$I_C^X = \int_0^X F(x, y, y')\, dx,$$

рассматриваемый в подклассе $K^X$ функций класса $K$, определенных на $[0, X]$, для любого $X > 0$ ограничен снизу числом, вообще говоря, зависящим от $X$; пусть далее для любого $\varepsilon > 0$ существует число $X_\varepsilon \geqslant 0$ такое, что, какова бы ни была абсолютно непрерывная кривая $C\{y = y(x),\ 0 \leqslant x < +\infty\}$, лежащая в области $A$, для которой $F(x, y(x), y'(x))$ является интегрируемой на любом конечном отрезке, справедливо неравенство

$$\int_{x'}^{x''} F(x, y, y')\, dx \geqslant -\varepsilon,$$

$$x'' > x' \geqslant X_\varepsilon;$$

пусть, наконец, для любого $m > i$ ($i$ — нижняя грань интеграла $I_C^{+\infty}$ в $K$) подкласс $K_m$ кривых из $K$, для которых $I_C^{+\infty} \leqslant m$, состоит из равномерно ограниченных и равностепенно абсолютно непрерывных на каждом конечном интервале кривых.

Тогда в классе $K$ существует абсолютный минимум интеграла (1). Далее доказанная общая теорема прилагается к случаю квадратичного функционала

$$I_C^{+\infty} = \int_0^{+\infty} \{A(x) y^2 + B(x) y'^2 + 2C(x) yy' + 2D(x) y + 2E(x) y'\}\, dx, \qquad (2)$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$, $E(x)$ — непрерывные на $0 \leqslant x < +\infty$ функции. Именно доказывается, что если: а) $B(x) > 0$, $A(x) B(x) \geqslant C^2(x)$ для $x \geqslant 0$; б) $A(x) B(x) \geqslant (C(x) - \varepsilon)^2$ для $x \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$;

в) $\int_0^{+\infty} |D(x)|\, dx < +\infty$;

г) $E(x)$ на $[0, +\infty)$ является функцией ограниченной вариации и стремится к нулю при $x \to +\infty$, то в полном классе $K$ допустимых кривых, выходящих из точки $(0, y_0)$, где $y_0$ — фиксированное, но произвольное число, существует абсолютный минимум интеграла (2).

Отметим следующую лемму, использованную для доказательства существования абсолютного минимума интеграла (1) при некоторых ограничениях, эквивалентных сформулированным выше.

Лемма. Пусть функция $Q(x, y)$ непрерывна вместе с $\partial Q / \partial x$ в односвязной области $D$ и пусть $C\{y = y(x),\ a \leqslant x \leqslant b\}$ — кривая из $D$, для которой $y(x)$ является абсолютно непрерывной функцией на $[a, b]$. Тогда справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b Q(x, y)\, y'\, dx - \int_{y(a)}^{y(b)} Q(\bar{x}, \eta)\, d\eta \right| \leqslant \iint_D \left| \frac{\partial Q}{\partial x} \right| dx\, dy$$

при любом $\bar{x}$, для которого три сегмента с концами

$$(b, y(b)), (\bar{x}, y(b)); \quad (\bar{x}, y(b)), (\bar{x}, y(a)); \quad (\bar{x}, y(a)), (a, y(a))$$

целиком лежат в $D$. *М. К. Керимов*

# АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

**5148. Некоторые теоремы о дробных производных.** Каттнер (Some theorems on fractional derivatives. Kuttner B.), Proc. London Math. Soc., 1953, **3**, № 12, 480—497 (англ.)

Пусть на сегменте [0,1] задана суммируемая функция $\psi(x)$. Рассмотрим:

$$I_+^r \psi(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_0^x (x-t)^{r-1} \psi(t)\, dt,$$

$$D_+^r \psi(x) = \frac{d^n}{dx^n} I_+^{n-r} \psi(x);$$

$$I_-^r \psi(x) = \frac{1}{\Gamma(r)} \int_x^1 (t-x)^{r-1} \psi(t)\, dt,$$

$$D_-^r \psi(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} I_-^{n-r} \psi(x).$$

В работе исследуются свойства функций $I_-^r \psi(x)$ и $D_-^r \psi(x)$ и связь этих функций с дробным интегралом $I_+^r \psi(x)$ и дробной производной $D_-^r \psi(x)$ $r$-го порядка ($0 \leqslant n \leqslant r < n+1$, $n$ — целое) от функции $\psi(x)$ (Зигмунд А., Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939, § 9.8).

Будем говорить, что в интервале (0,1) функция $f(x)$ является $r$-ым неопределенным интегралом от функции $\varphi(x) \in L(0,1)$, если существуют постоянные $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ такие, что при $n=0$ почти для всех $x$, а при $n \geqslant 1$ для всех $x$ имеет место равенство

$$f(x) = I_+^r \varphi(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k$$

Положим еще $S(u,x) = \dfrac{x^r - u^r}{x^r (x-u)}$, $B = B(r) = \int_0^1 \dfrac{x^{-r} - x^{r-1}}{1-x}\, dx$. При предположении, что $f(x)$ является $r$-ым неопределенным интегралом от $\varphi(x)$, доказано:

Теорема 1. а) Для каждого $x$, при котором $\varphi(x)$ является производной от своего (первого) неопределенного интеграла, $D_-^r f(x)$ существует тогда и только тогда, когда существует выражение

$$A(x) = \frac{d}{dx} \int_0^1 \varphi(u) \ln|x-u|\, du,$$

причем, если $A(x)$ существует, то $D_-^r f(x)$ можно представить в виде

$$D_-^r f(x) = \frac{\sin \pi r}{\pi} \left\{ \frac{d}{dx} \int_0^1 \varphi(u) \ln|x-u|\, du + \int_0^1 \varphi(u) S(1-u, 1-x)\, du - B\varphi(x) \right\}$$

б) Если при $\alpha > 0$ $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, 1)$ (Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М.—Л., 1947, § 80), то $D_-^r f(x)$ существует в (0,1) почти всюду, причем

$$D_-^r f(x) = \frac{\sin \pi r}{\pi} \left\{ \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{x-t}\, dt + \int_0^1 \varphi(u) S(1-u, 1-x)\, du - B\varphi(x) \right\}.$$

в) Если $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, то утверждение б) имеет место всюду в интервале (0,1).

Теорема 2. Если на (0,1) $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ (или же $\varphi(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$, где $p > 1, 0 < \alpha \leqslant 1$, или $p = 1, 0 < \alpha < 1$), то $D_-^r f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ (соответственно $D_-^r f(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, p)$) во всяком интервале, который лежит строго внутри (0,1).

Указываются также условия, при которых утверждение теоремы 2 имеет место во всем интервале (0,1). *В. К. Дзядык*

**5149. Об ортогональных многочленах.** Крейс (Über die Orthogonalpolynome. Kreis H.), Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmath., 1953, **53**, 46—56 (нем.)

Пусть для произвольных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$P_s(x) = x^s + a_{s-1} x^{s-1} + \ldots + a_0$$

суть соответствующие ортогональные многочлены, удовлетворяющие условию

$$\sum_x P_h(x)\, P_k(x) = 0, \quad h \neq k.$$

В частности, $P_0(x) = x^0 = 1$, $\sum_x P_0(x) = n \equiv N_0$; $\sum_x P_k(x) = 0$ для $k \neq 0$; $\sum_x x^h P_k(x) = 0$ для $h < k$.

Из этого следует, что $P_1(x) = x - \sum_{i=1}^n x_i / n$, и для $n > 1$ норма $N_1 \equiv \sum_x P_1^2(x) = \sum_x P_1(x) \neq 0$. Многочлен $P_2(x)$ может быть определен из уравнения $x^2 = P_2(x) + A_1 P_1(x) + A_0 P_0(x)$, так как $A_0 N_0 = \sum_x x^2 P_0(x)$, $A_1 N_1 = \sum_x x^2 P_1(x)$ и $N_2 \equiv \sum_x P_2^2(x) = \sum_x x^2 P_2(x) \neq 0$, $n > 2$. Таким образом могут быть определены единственная система многочленов $P_3(x), P_4(x), \ldots$ и норм $N_3, N_4, \ldots$ и, наконец,

$P_n(x)$, который совпадает с произведением $P_n^*(x) \equiv (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) = P_n(x) + A_{n-1}P_{n-1}(x) + \ldots + A_0P_0(x)$. Здесь $A_iN_i = \sum_x P_n^*(x)P_i(x) = 0$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, так что $A_i = 0$. Следовательно,

$$P_n(x) \equiv P_n^*(x) \text{ и } N_n \equiv \sum_x P_n^2(x) = \sum_x P_n^{*2}(x) = 0.$$

Если $z = x - m$, где $m$ — произвольно, то многочлены $Q_s(z) = P_s(x)$ аналогично удовлетворяют (1) и

$$N_s = \sum_{i=1}^{n} P_s^2(x_i) = \sum_{i=1}^{n} Q_s^2(z_i).$$

Если $x_i$ — целые 1, 2, . . . , $n$, то для $m = (1+n)/2$, $z_i$ образуют арифметическую прогрессию с

$$z_1 = -(n-1)/2 \text{ и } z_n = (n-1)/2.$$

Многочлены $Q_s(z)$ и $(-1)^s Q_s(-z)$ удовлетворяют (1) и $(-1)^s Q_s(-z) = Q_s(z)$. Между тремя последовательными многочленами $Q_s(z)$ выполняется соотношение $Q_{s+1}(z) = zQ_s(z) - (N_s/N_{s-1})Q_{s-1}(z)$. Кроме того,

$$N_s = s!\,s!\binom{n+s}{2s+1}\Big/\binom{2s}{s}.$$

Из этих формул получается формула Чебышева

$$Q_{s+1}(z) = zQ_s(z) - \frac{s^2(n^2-s^2)}{4(4s^2-1)}Q_{s-1}(z).$$

*E. Frank*

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 1, 29.

**5150. О среднем арифметическом и среднем геометрическом. II. Якобсталь** (Über das arithmetische und geometrische Mittel. II. Jacobsthal Ernst), Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim, 1952, 25, 5—6 (журнал вышел из печати в 1953 г. ) (нем.)

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 852.

**5151 К. Сборник задач по теории функций. Задачи по элементарной теории функций. I. Кнопп** (Problem book in the theory of functions. Problems in the elementary theory of functions. Vol. I. Knopp Konrad, translated by Lipman Bers, 134 pp., Dover Publications, Inc., New York, 1953, 2.25 doll.), Phys. Today, 1953, **6**, № 11, 16 (библ.)

**5152 К. Курс анализа Радона. Кинякуния** (A course of Radonian calculus. Kinikuniya Y. A., 1 + 36 pp., Tanne Trading Co., Sapporo 1953, 0,30 doll.), Bull. Amer. Math. Soc., 1953, 59, № 6, 614 (библ.)

**5153 К. Курс высшей математики, т. II. Смирнов В. И.**, 627 стр., изд. 13-е стереотипное, Гостехиздат, М., 1953, 17 р. 10 к.

См. РЖМат, 1954, 1699 К.

**5154 РЕЦ. Математика для естествоиспытателей и химиков. Введение в приложения высшей математики. Изд. 6-е, улучш. Зирк** (Mathematik für Naturwissenschaftler und Chemiker. Eine Einführung in die Anwendung der höheren Mathematik. Sirk Hugo. 6 verbess. Aufl., 302 S., Ill., Verlag von Theodor Steinkopf, Dresden— Leipzig, 1950, 12 DM) [Рецензия: Литман (Littmann G.), Chemiker-Ztg., 1954, **78**, № 2, 57 (нем.)]

**5155 РЕЦ. Аналитическая геометрия и анализ. Смейл** (Analytic geometry and calculus. Smail Lloyd, L. XIV + 644 + LXX pp., Appleton-Century-Crofts. Inc. N. Y., 1953, 5.50 doll.) [Рецензия: Рид (Read Cecil B.), School Sci. and Math., 1953, **53**, № 9, 756—757 (англ.)]

## ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

**5156. О связи лимитирующих теорем с теоремами о больших показателях. Раджагопал** (On the relation of limitation theorems to high-indices theorems. Rajagopal C. T.), J. London Math. Soc., 1953, 28, ч. 3, № 111, 322—329 (англ.)

Пусть функция $\varphi(u)$ удовлетворяет следующим условиям: а) для $u \geqslant 0$ функция $\varphi(u) \geqslant 0$ непрерывна и не возрастает,

б) $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\infty) = 0$,

в) существует функция $\psi(u) = O(1/u)$ для $u > 0$ такая, что $0 \leqslant \varphi(u) - \varphi(u') \leqslant (u'-u)\psi(u)$ для $u' > u > 0$.

Пусть $\lambda = \{\lambda_n\}$ — последовательность, удовлетворяющая условию $1 < \lambda_1 < \lambda_2 \ldots < \lambda_n < \ldots$, $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем $(\Phi, \lambda)$ к $s$, если для $t > 0$ ряд $\sum_{n-1}^{\infty} a_n \varphi(\lambda_n t) = \Phi(t)$ сходится и $\lim_{t \to +0} \Phi(t) = s$. Доказывается:

1. Если положительная последовательность $\{u_n\}$ такова, что $\lim_{n \to \infty} u_n \varphi(\lambda_n t) = 0$ для каждого $t > 0$, где $\varphi(u)$ удовлетворяет условиям а), б), в), и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ суммируем $(\Phi, \lambda)$ только при $a_n = O(u_n)$, то

$$\mu_n = \max\left\{\frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}, \frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}\right\} = O(u_n).$$

2. Пусть $\varphi(u)$ удовлетворяет условиям а), б), в) или определяется равенствами

$$\varphi(u) = \begin{cases} (1-u)^k \ (k>0), & \text{если } u \leqslant 1, \\ 0, & \text{если } u \geqslant 1, \end{cases}$$

т. е. является ядром Рисса. Тогда, если для всякого суммируемого методом $(\Phi, \lambda)$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ справедливо

равенство $a_n = O(1)$, то имеет место условие больших показателей

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} > 1.$$

*М. Д. Калашников*

**5157. Замечание о гёльдеровском среднем. Ньютон** (A note on the Hölder mean. Newton Tyre A.), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 4, 807—822 (англ.)

Положим

$$F_j^m(x) = xG_j^m(x) = \sum_{p+\ldots+s=m+1} x^p (x-1)^q \ldots (x-j)^s,$$
$$j = 0,1, \ldots, m.$$

В работе устанавливаются некоторые рекуррентные соотношения для полиномов $G_j^m(x)$ и их коэффициентов, а также даются приложения этих соотношений к гёльдеровским средним. Гёльдеровские средние последовательности $\{S_n\}$ определяются следующим образом:

$$H_n^0 = S_n, \quad H_n^k = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} H_n^{k-1}, \quad n \geqslant 0, \; k = 1,2, \ldots$$

Средние Гёльдера для целых отрицательных порядков автор определяет, полагая для $m \geqslant 0$

$$H_n^{-m} = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i G_i^m (n+1) S_{n-i}.$$

Тогда для всех целых $k$ и $m \geqslant 0$

$$H_n^k = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j G_j^m (n+1) H_{n-j}^{k+m}.$$

Среди доказанных предположений отметим следующие.

1. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, суммируемый $(H, q+m)$, $m \geqslant 0$ к $S$, будет суммируем $(H, q)$ к $S$ тогда и только тогда, когда последовательность

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left( \sum_{j=0}^{i} (-1)^i G_j^m (n+1) \right) a_{n-i}$$

суммируема $(H, q+m)$ к нулю.

2. Для того, чтобы сходящийся знакопеременный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ был суммируем $(H, -m)$, $m \geqslant 0$, необходимо и достаточно, чтобы $\lim_{n\to\infty} n^m a_n = 0$.

*М. Д. Калашников*

**5158. Заметка об одном классе тауберовых рядов. Раджагопал** (Note on a class of tauberian series. Rajagopal C. T.), Duke Math. J., 1953, **20**, № 4, 617—620 (англ.)

Работа является обобщением результатов Агнью (Agnew R. P., Duke Math. J., 1952, **19**, 131—138).

Пусть $\{\lambda_n\}$ — неограниченная последовательность строго возрастающих с ростом $n$ положительных чисел. Будем разуметь под $\psi(u)$ интегрируемую на $(0, \infty)$ неотрицательную функцию, для которой $\int_0^\infty \psi(u)\, du = 1$. Преобразование

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{s\lambda_n}^{\infty} \psi(u)\, du \quad (s > 0)$$

при $s \to 0$ определяет регулярный метод суммирования ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Обозначим через $C$ ориентированную, замкнутую кривую, изображающую в комплексной плоскости $(z)$ непрерывную функцию $z(t) = x(t) + iy(t)$ $(-\infty < t < \infty)$ с периодом $L$, имеющую ограниченную вариацию на интервале длины $L$. Устанавливаются следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такой, что

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n |a_n| / (\lambda_n - \lambda_{n-1}) = h > 0 \quad (\lambda_n \sim \lambda_{n-1}),$$

и пусть его частные суммы являются точками кривой $C$, расположенными так, что переход от одной из них к другой, соответствующей большему $n$, совершается в положительном направлении кривой $C$. Тогда величина $F(s)$ имеет смысл и множество ее предельных точек при $s \to 0$ располагается на кривой $C_h$, которую описывает в комплексной плоскости точка

$$\omega(\alpha, h, t) = \alpha \int_0^\infty \psi(\alpha u)\, z(t + h \log u)\, du \quad (\alpha > 0),$$

когда $t$ пробегает, возрастая, интервал длины $L$. Кривая $C_h$ является ориентированной, замкнутой и спрямляемой кривой, не зависящей от $\alpha$.

Теорема 2. Пусть $z(t)$ — точка кривой $C$ и пусть для $\psi(u)$ выполняется дополнительное условие (*): интеграл $\int_0^\infty \psi(u) |\log u|\, du$ имеет смысл.

Тогда при каких-либо положительных $\alpha$ и $h^*$ имеем

$$|\omega(\alpha, h^*, t) - z(t)| \leqslant h^* \tau(\alpha),$$

где $\tau(\alpha) = \alpha \int_0^\infty \psi(au) |\log u|\, du$.

Указывается очевидное следствие из теоремы 2: если к условиям теоремы 1 добавить условие (*), то при каком-либо фиксированном $\alpha > 0$ расстояние между любой точкой $z(t)$ кривой $C$ и соответствующей точкой $\omega(\alpha, h, t)$ кривой $C_h$, на которой располагаются предельные точки $F(s)$, будет меньше любого фиксированного $\varepsilon > 0$, если $h < \varepsilon / \tau(\alpha)$.

Результаты Агнью соответствуют случаю, когда $\lambda_n = n$ и $\psi(u) = e^{-u}$.

*В. М. Даревский*

**5159. Остаточный член в одной тауберовой теореме.** Ф р е й д (Restglied eines tauberschen Satzes, II. F r e u d G é z a), Acta math. Acad. sci. hung., 1952, **3**, № 4, 299—307 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

Работа посвящена обобщению более раннего результата автора (G. Freud, Acta math. Acad. sci. hung., 1951, **2**, 299—308) б остаточном члене в известной тауберовой теореме Харди и Литтльвуда. В настоящей работе доказывается следующее. Пусть интеграл

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}d\tau(t),$$

где $\tau(t)$ — монотонно возрастающая функция $0\leqslant t<\infty$ и $f(t)\geqslant 0$ сходится при $s>0$. Пусть при $s\to+0$

$$F(s)=S\,\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^\alpha}\,[1+r(s)]$$

$$|r(s)|<R(s),$$

где $R(s)$ монотонно возрастает, $R(0)=0$, $R(ks)<\epsilon^{c_1k}\,R(s)$ ($c_1$ не зависит от $r$ и $k$). Доказывается, что при $x\to\infty$

$$\int_0^x t^\beta f(t)(x-t)^m\,d\tau(t)=$$

$$=\frac{m!\,\alpha\,Sx^{\alpha+\beta+m}}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\ldots(\alpha+\beta+m)}\times$$

$$\times[1+O\{(\lg 1/R(1/x))^{-m-1}\}]$$

(ранний результат автора получается при $m=0$). Доказательство производится обобщением рассуждений автора в первом сообщении, основанных на «односторонних» полиномиальных приближениях в метрике $L_1$ (используется конструкция А. А. Маркова и Стильтьеса, см., например, А. А. Марков, «Избранные труды», М., 1948, 20—21). Оценка, повидимому, является неулучшаемой. *А. Г. Постников*

**5160 к. Регулярность и расходящиеся ряды.** В е р н о т т (Régularité et séries divergentes. V e r n o t t e P i e r r e. (Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, № 282), XI + 52 pp., 1953, 800 fr.), Proc. Phys. Soc., 1954, **B67**, № 410, 167 (библ.)

## СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

**5161. О некоторых уравнениях, связанных с Бейтмановскими функциями.** Б а г ч и, М у к х е р д ж и (Note on certain equations, connected with Bateman functions. B a g c h i H a r i D a s, M u k h e r j i B h o l a N a t h), Ann. Scuola norm. super. Pisa, 1952, **6**, № 3,—4, 269—280 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Сначала доказывается, что последовательность функций $f_{2n}(z)$, удовлетворяющая двум из четырех уравнений системы

$$(n+1)f_{2n+2}(z)+2(n-z)f_{2n}(z)+$$
$$+(n-1)f_{2n-2}(z)=0, \qquad (I)$$

$$(n-1)f_{2n-2}(z)+(n-z)f_{2n}(z)=zf'_{2n}(z), \qquad (II)$$

$$f'_{2n}(z)+f'_{2n+2}(z)=f_{2n}(z)-f_{2n+2}(z), \qquad (III)$$

$$zf''_{2n}(z)+(2n-2)f_{2n}(z)=0, \qquad (A)$$

должна удовлетворять и остальным двум уравнениям этой системы; наиболее общее решение, удовлетворяющее всем четырем уравнениям, может быть представлено в виде

$$f_{2n}(z)=a\,\alpha_{2n}(z)+b\,\beta_{2n}(z),$$

где $\alpha_{2n}(z)$ и $\beta_{2n}(z)$ означают два линейно независимые частные решения уравнений (I) и (II), следовательно, и (III) и (A); а $a$, $b$ суть две произвольные численные константы, не зависящие от $n$.

Заметим, что дальнейшие результаты неверны вследствие допущенной ошибки, о которой авторы сообщают в дополнении к работе (стр. 280).

*Н. С. Кошляков*

**5162 к. Вырожденные гипергеометрические функции и их различные приложения.** Б у х г о л ь ц (Die konfluente hypergeometrische Funktion mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. B u c h h o l z H e r b e r t, XVI + 234, Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1953) (нем.)

Монография имеет 7 глав. Гл. I. Различные формы дифференциальных уравнений вырожденных гипергеометрических функций и определение их решений. Гл. II. Общие интегральные представления параболических функций и их произведений. Гл. III. Асимптотика параболических функций. Гл. IV. Неопределенные и определенные интегралы от параболических функций и некоторые бесконечные ряды. Гл. V. Полиномы, соответствующие параболическим функциям, и бесконечные ряды этих полиномов. Гл. VI. Интегралы, зависящие от параметров в параболических координатах в связи с различными типами волн математической физики. Гл. VII. Нули и собственные значения. Основное содержание монографии таково. Излагается теория вырожденных гипергеометрических функций, удовлетворяющих линейному дифференциальному уравнению Римана в предельном случае, когда две особые точки уравнения сливаются в одну. Это уравнение приводится к виду

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left\{-\frac14+\frac{\chi}{2}+\frac{1-\mu^2}{4z^2}\right\}y=0$$

и имеет фундаментальную систему решений

$$y_1=\mathcal{M}_{\chi,\mu/2}(z)=z^{(1+\mu)/2}e^{-z/2}\times$$
$$\times\,{}_1F_1[(1+\mu)/2-\chi;\,1+\mu;\,z],$$

$$y_2=\mathcal{M}_{\chi,-\mu/2}(z)=z^{(1-\mu)/2}e^{-z/2}\times$$
$$\times\,{}_1F_1[(1-\mu)/2-\chi;\,1-\mu;\,z],$$

где

$${}_1F_1(\alpha;\,\gamma;\,z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{(\gamma)_k\,k!}\,z^k,\quad(\lambda)_k=\frac{\Gamma(\lambda+k)}{\Gamma(\lambda)}.$$

Приводятся интегральные представления вырожденных гипергеометрических функций—так, например:

$$\Gamma[(1+\mu)/2-\chi]\,\Gamma[(1-\mu)/2+\chi]\;\mathscr{M}_{\chi,\mu/2}(z)=$$

$$=z^{(1+\mu)/2}e^{-z/2}\int_0^1 e^{zu}u^{(\mu-1)/2-\chi}(1-u)^{(\mu-1)/2+\chi}\,du=$$

$$=2^{-\mu}z^{(1+\mu)/2}\int_0^{\pi}e^{(z/2)\cos\varphi}\sin^{\mu}\varphi\,(\operatorname{tg}(\varphi/2))^{2\chi}\,d\varphi,$$

$$\operatorname{Re}[(\mu+1)/2\pm\chi]>0.$$

Вместо решений $\mathscr{M}_{\chi,\mu/2}(z)$, $\mathscr{M}_{\chi,-\mu/2}(z)$ часто представляется удобным выбирать в качестве основных решений функции Уиттекера $W_{\chi,\mu/2}(z)$, $W_{-\chi,\mu/2}(ze^{\pm\pi i})$, связанные с функциями $\mathscr{M}_{\chi,\mu/2}(z)$, $\mathscr{M}_{\chi,-\mu/2}(z)$ соотношениями

$$W_{\chi,\mu/2}(z)=\frac{\pi}{\sin\pi\mu}\left\{-\frac{\mathscr{M}_{\chi,\mu/2}(z)}{\Gamma[(1-\mu)/2-\chi]}+\right.$$

$$\left.+\frac{\mathscr{M}_{\chi,-\mu/2}(z)}{\Gamma[(1+\mu)/2-\chi]}\right\},$$

$$W_{-\chi,\mu/2}(ze^{\pm\pi i})=\frac{\pi}{\sin\pi\mu}\left\{-\frac{e^{\pm\pi i(\mu+1)/2}M_{\chi,\mu/2}(z)}{\Gamma[(1-\mu)/2+\chi]}+\right.$$

$$\left.+\frac{e^{\pm\pi i(1-\mu)/2}\mathscr{M}_{\chi,-\mu/2}(z)}{\Gamma[(1+\mu)/2+\chi]}\right\}$$

Приводится простейшее интегральное представление уиттекеровской функции:

$$W_{\chi,\mu/2}(z)=\frac{z^{\chi}e^{-z/2}}{\Gamma[-\chi+(\mu+1)/2]}\times$$

$$\times\int_0^{\infty}t^{-\chi-(1+\mu)/2}e^{-t}\left(1+\frac{t}{z}\right)^{\chi-(1-\mu)/2}dt,$$

$$\operatorname{Re}(\chi-(1+\mu)/2)\leqslant 0.$$

Одним из наиболее важных частных случаев уиттекеровской функции являются функции параболического цилиндра

$$D_{\nu}(z)=2^{\nu/2}(z^2/2)^{-1/4}W_{(2\nu+5)/4,\pm 1/4}(z^2/2),$$

являющиеся решением уравнения Вебера

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left[\nu+\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4}\right]y=0.$$

Указывается простейшее интегральное представление функции $D_{\nu}(z)$

$$D_{\nu}(z)=(2/\pi)^{1/2}\exp(z^2/4)\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\exp(-t^2/2)\cos((\pi\nu/2)-zt)\,t^{\nu}\,dt$$

$$\operatorname{Re}(\nu)>-1.$$

При целом и положительном $\nu=n$ функции $D_n(z)$ переходят в полиномы Эрмита:

$$H_n(z)=2^{n/2}\exp(z^2/2)\,D_n(z\sqrt{2})=$$

$$=(-1)^n\exp z^2\frac{d^n}{dz^n}\exp(-z^2),$$

образующие систему функций, ортонормированных на интервале $(-\infty,+\infty)$. Даются интегральные представления для произведений вырожденных гипергеометрических функций, например:

$$\mathscr{M}_{\chi,\mu/2}(a_1t)\,\mathscr{M}_{\chi,\mu/2}(a_2t)=$$

$$=\frac{(a_1a_2)^{1/2}\,t}{\Gamma[(1+\mu)/2+\chi]\,\Gamma[(1+\mu)/2-\chi]}\times$$

$$\times\int_0^{\pi}\exp[-((a_1+a_2)/2)\,t\cos\varphi]\times$$

$$\times J_{\mu}(t\sqrt{a_1a_2}\sin\varphi)\,(\operatorname{ctg}(\varphi/2))^{2\chi}\,d\chi$$

$$\operatorname{Re}((1+\mu)/2\pm\chi)>0\qquad a_1,\ a_2>0$$

$$W_{\chi,\mu/2}(it)\,W_{\chi,\mu/2}(-it)=$$

$$=\frac{2t}{\Gamma[(1+\mu)/2-\chi]\,\Gamma[(1-\mu)/2-\chi]}\times$$

$$\times\int_0^{\infty}K_{\mu}(tx)\left[\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}\right]^{2\chi}\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\operatorname{Re}x<\operatorname{Re}((1+\mu)/2),\ \operatorname{Re}t>0.$$

Излагается асимптотика параболических функций. Дается асимптотическое разложение функции $W_{\chi,\mu/2}(z)$ при больших значениях $|z|$:

$$W_{\chi,\mu/2}(z)\backsim z^{\mu}\exp(-z/2)\times$$

$$\times\left\{\sum_{\lambda=0}^{N}\frac{((1+\mu)/2-\chi)_{\lambda}((1-\mu)/2-\chi)_{\lambda}}{\lambda!\,(-z)^{\lambda}}+O((-z)^{-N-1})\right\}$$

и асимптотическое представление функции $\mathscr{M}_{\chi,\mu/2}(z)$ при большом $\mu$ и при $\chi$, не зависящем от $\mu$:

$$\mathscr{M}_{\chi,\mu/2}(z)\backsim\frac{z^{(1+\mu)/2}}{\Gamma(1+\mu)}\{1+O(1/\mu)\}\quad|\arg\mu|<\frac{\pi}{2}.$$

При помощи метода перевала изучается асимптотика для больших значений $z$ и $\chi$ и приводятся результаты работ Эрдейи (Erdelyi) и Ловерье (Lauwerier). Указывается на асимптотические формулы Лангера (Langer). Исследуется вопрос о природе и распределении корней уравнения $\mathscr{M}_{\chi,\mu/2}(z)$ на $z$-плоскости и на $\chi$-плоскости. Излагаются некоторые основные предельные задачи, в которых собственные функции выражаются через вырожденные гипергеометрические функции.

Так, например, задача о свободных колебаниях натянутой струны при параболическом законе распределения масс приводит к волновому уравнению

$$\rho(\xi)\frac{\partial^2y}{dt^2}=P\frac{\partial^2y}{\partial\xi^2},\quad(-a\leqslant\xi\leqslant a,\quad y(\pm a)=0),$$

где

$$\rho(\xi)=\rho_{\text{мин}}+(a^2-\xi^2)\,\Delta,\ (\Delta a^2=\rho_{\text{макс}}-\rho_{\text{мин}}),$$

а $P$ означает натяжение струны.

Метод разделения переменных приводит к уравнению

$$\frac{d^2y}{d\xi^2}+\frac{\omega_n^2}{P}\{\rho_{\text{мин}}+(a^2-\xi^2)\Delta\}\,y=0,$$

общее решение которого будет

$$y(\xi)=C_u\xi^{-1/2}\mathscr{M}_{\chi,\,1/4}(\omega_n\sqrt{\Delta/P}\,\xi^2)+$$
$$+C_g\xi^{-1/2}\mathscr{M}_{\chi,\,-1/4}(\omega_n\sqrt{\Delta/P}\,\xi^2).$$

Монография заканчивается сводкой всех наиболее известных, специальных функций, которые являются частными случаями вырожденных гипергеометрических функций.

Сюда относятся цилиндрические функции, неполные функции гамма, функции Шлёмильха, интегральные синус и косинус, интегралы Френеля, интеграл теории вероятностей, полиномы Лагерра и Эрмита, функции Бейтмана и др. функции.

*Н. С. Кошляков*

## ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

**5163. Символический анализ и функциональные интегральные уравнения.** Пародди (Analyse symbolique et équations intégrales fonctionnelles. Parodi Maurice), Bull. sci. math., 1953, 127, сер. 2, juillet—août, 114—119 (франц.)

Преобразованием Лапласа решается интегральное уравнение

$$f(\alpha t)+\lambda\int_0^\infty k(x,\,t)\,f(x)\,dx=g(t) \qquad (1)$$

($\alpha\neq 0$, вещественное).

Находится изображение функции $f(t)$ в случае, когда изображение по $t$ ядра $k(x,\,t)$ имеет вид $\rho(s)\exp(-x\psi(s))$, где $\alpha\psi(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$F[F(s)]=s. \qquad (2)$$

Обратное преобразование совершается в частном случае, когда $k(x,\,t)=(t/x)^{\nu/2}J_\nu(2\sqrt{tx})$ ($\nu>0$). Если $\lambda$ является собственным значением этого ядра ($\lambda=\pm(\sqrt{\alpha})^{\nu-1}$), то для разрешимости (1) при $g(t)\not\equiv 0$ изображение $g(t)$ должно удовлетворять уравнению

$$\theta(s)=\pm(\sqrt{\alpha}/s)^{\nu+1}\,\theta(\alpha/s). \qquad (3)$$

Уравнение (1) или же его частный случай при $\alpha=1$ и при том же требовании относительно $k(x,\,t)$ исследованы также в других работах автора (РЖМат, 1953, 1155; 1954, 3736). *Э. Я. Риекстыньш*

**5164. Некоторые теоремы о функциях, инвариантных относительно обобщенных преобразований Фурье.** Бхатнагар (On certain theorems on self-reciprocal functions. Bhatnagar K. P.), Acad. roy. Belgique, Bull. cl. sci., 1953, 39, сер. 5, 42—69 (англ.)

Рассматривается преобразование с ядром

$$\widetilde{\omega}_{\mu,\,\nu}(x,\,y)=\sqrt{xy}\int_0^\infty J_\nu(t)\,J_\mu\left(\frac{xy}{t}\right)\frac{dt}{t},$$

где $\operatorname{Re}(\mu+3/2)<0<\operatorname{Re}(\nu+3/2)$, аналогичное преобразованию Ганкеля, изученному Харди и Титчмаршем (Hardy G. H., Titchmarsh E. C., Quart. J. Math. (Oxford ser.) 1930, I, 196—231; см. также Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1948, гл. VIII и IX). Доказывается ряд теорем о функциях, двойственных себе в этом преобразовании. Если класс таких функций обозначить через $R_{\mu,\,\nu}$, через $R_\mu$ обозначить класс функций, двойственный себе в преобразовании Ганкеля порядка $\mu$, и под $A(\omega,\,a)$ понимать класс функций (введенный Харди и Титчмаршем), аналитических в угле $A: r>0,\ |\theta|<\omega$ $(0<\omega\leqslant\pi)$, и $O(|x|^{-a-\delta})$ для малых $|x|$, $O(|x|^{a-1+\delta})$, для больших $|x|$ $(a<1/2)$ равномерно в любом угле $|\theta|\leqslant\omega-\eta<\omega$ при произвольном $\delta>0$, то:

Теорема 1. Если $f(x)\in R_\mu$, $\rho(x)\in R_\nu$, $f(x)$ и $\rho(x)$ принадлежат классу $A(\omega,\,a)$, то

$$g(x)=\int_0^\infty y^{-1}\rho(y)\,f(x/y)\,dy\in R_{\mu\ \nu}.$$

Теорема 3. Если $f(x)\in R_{\mu,\,\nu}$ и $f(x)$ и $\rho(x)$ принадлежат к классу $A(\omega,\,a)$, причем $\rho(1/x)=x\rho(x)$, то и

$$g(x)=\frac{1}{x}\int_0^\infty\rho\left(\frac{y}{x}\right)f(y)\,dy\in R_{\mu,\,\nu}.$$

Теорема 5. Если $f(x)\in R_{\mu,\,\lambda}$ и $A(\omega,\,a)$ и

$$\rho(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{K-i\infty}^{K+i\infty}\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}s+\frac{1}{4}\right)\times$$
$$\times\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}s+\frac{3}{4}\right)x^{-s}\chi(s)\,ds,$$

где $\chi(s)=\chi(1-s)$ в полосе $a<\operatorname{Re}s<1-a$,

$$\chi(s)=O\left\{e^{\left(\frac{\pi}{2}-\omega+\tau_1\right)|t|}\right\},\quad t=\operatorname{Im}s,$$

равномерно в любой внутренней полосе (при произвольном $\eta>0$) и $a<K<1-a$, то

$$g(x)=\int_0^\infty\rho(y)\,f(xy)\,dy\in R_{\nu,\,\lambda}.$$

Приводятся многочисленные примеры приложения теорем. Так,

$$\int_0^\infty\frac{y^{n+\mu+1/2}\,K_n(y)}{(x^2+y^2)^{1/2}}dy\in R_{\mu,\,\nu},$$

$$\mu>-1/2,\ 2n+\mu>-1/2,\quad x^\nu\int_0^\infty\frac{y^\nu J_\nu(xy)}{y+1}dy=$$

$$= \frac{\pi x^{\nu}}{2\cos\nu\pi}\{H_{-\nu}(x) - Y_{-\nu}(x)\} \in R_{2\nu-1/2,\,1/2},$$
$$-1/2 < \nu < 3/2.$$

Последние из 17 теорем статьи относятся к преобразованиям с еще более общим ядром типа

$$\widetilde{\omega}_{k_1, k_2, \ldots, k_n} = \sqrt{xz}\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty} J_{k_1}(t_1)\,J_{k_2}(t_2)\ldots$$
$$\ldots J_{k_{n-1}}(t_{n-1})\,J_{k_n}\left(\frac{xz}{t_1t_2\ldots t_{n-1}}\right)\frac{dt_1\ldots dt_{n-1}}{t_1t_2\ldots t_{n-1}}$$

при $n = 3, 4$. *В. И. Левин*

**5165. Некоторые формулы обращения для обобщенного преобразования Ханкеля. А г а р в а л** (Some inversion formulae for generalised Hankel transform. A g a r w a l R. P.), Bull. Calcutta Math. Soc., 1953, 45, № 2, 69—73 (англ.)

В ранее опубликованной работе (Agarwal R. P., Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1950, 64, 164—168) автор ввел сбобщенное преобразование Ханкеля

$$f(x) = (1/2)^{\lambda}\int_0^{\infty}(xy)^{\lambda+1/2}\,I_{\lambda}^{\mu}(x^2y^2/4)\,g(y)\,dy, \quad (1)$$

где

$$I_{\lambda}^{\mu}(x) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-x)^r}{r!\,\Gamma(1+\lambda+\mu r)},\quad \mu > 0$$

и показал, что при определенных условиях его обращение дается формулой

$$g(y) = 2^{\lambda+2-2(1+\lambda)/\mu}\,\mu^{-1}\int_0^{\infty}(xy)^{2(1+\lambda)/\mu-\lambda-3/2}\times$$
$$\times\, I^{1/\mu}_{(1+\lambda-\mu)/\mu}[(x^2y^2/4)^{1/\mu}]\,f(x)\,dx. \quad (2)$$

В настоящей статье устанавливаются две другие формулы обращения рассматриваемого преобразования, справедливые для определенного класса функций. Обе формулы имеют сложную структуру, причем в статье отсутствуют указания на какие-либо преимущества данных формул перед более простой формулой (2). *Н. Н. Лебедев*

## ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

**5166. Анализ сигналов и линейных операторов передачи. Ч. I. А н т л е с д'О р ь я к** (Analyse des signaux et analyse des opérateurs linéaires de transmission, I-re partie. Anglès d'A u r i a c H e n r i), Electr., courants faibles et électronique, 1953, 2, № 5, 119—138 (франц.)

Статья написана инженером для инженеров. Рассматривается некоторая система передач, ставящая в соответствие входному сигналу $s(t)$ ($t$ время) выходной сигнал $\sigma(t)$. Это соответствие определяет оператор передачи. Последний предполагается линейным и неизменяемым во времени (сигналу $s(t-\tau)$ отвечает сигнал $\sigma(t-\tau)$. Простейшие типы операторов передачи «эхо» $\sigma(t) = Ks(t-\tau)$ ($K$ — постоянная) и «фильтр»

$$\sigma(t) = A_1A_2e^{i2\pi ft},$$

где $A_2$ — комплексная постоянная, а $A_1$ — комплексное число, определяемое $s(t)$.

Разлагая $s(t)$ в интеграл Фурье

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty}A_1(f)\,e^{i2\pi ft}\,df, \quad (1)$$

можем произвольный оператор передачи задать в форме

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty}A_2(f)A_1(f)\,e^{i2\pi ft}\,df, \quad (2)$$

где $A_2(f)$ — комплекснозначная функция, характеризующая оператор передачи. Таким образом, элементарному входному сигналу $e^{i2\pi ft}$ ставится в соответствие элементарный выходной сигнал $A_2(f)e^{i2\pi ft}$ — «эхо» входного сигнала.

Пользуясь разложением Дирака

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty}s(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau = \quad (3)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}s(t-\tau)\,\delta(\tau)\,d\tau \quad (4)$$

и обозначая через $a(t)$ выходной сигнал, отвечающий входному сигналу $\delta(t)$, имеем

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{\infty}s(\tau)\,a(t-\tau)\,d\tau = \quad (5)$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}s(t-\tau)\,a(\tau)\,d\tau \quad (6)$$

Равенства (5) и (6) можно трактовать как разложения выходного сигнала $\sigma(t)$ по «эхо» сигнала $a(t)$ и по «эхо» входного сигнала $s(t)$ соответственно.

Наряду с разложением входного сигнала на элементарные, к которым применяется оператор передачи, можно исходить из разложения оператора передачи на элементарные операторы, каждый из которых применяется к входному сигналу. Так, правая часть формулы (2) может рассматриваться как результат суммирования величин $A_1(f)\,A_2(f)\times$ $\times\, e^{i2\pi ft}\,df$, представляющих собой результат применения элементарных операторов типа «фильтр» к сигналу $s(t)$, определяющему $A_1(f)$.

Связь между представлениями оператора с помощью формул (2) и (4) дается равенствами

$$A_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty}a(t)\,e^{-i2\pi ft}\,dt$$
$$a(t) = \int_{-\infty}^{\infty}A_2(f)\,e^{i2\pi ft}\,df.$$

*М. К. Гавурин*

**5167. Реакция систем без затухания на шум.** Данкан (Response of undamped systems to noise. Duncan D. B.), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, 24, № 9, 1252—1253 (англ.)

Рассматриваются линейные системы без затухания, возбуждаемые внешним воздействием (шумом) автокорреляционная функция которого допускает перестановку операций интегрирования и усреднения.

Получены выражения для средней квадратичной реакции системы на внешнее возбуждение и для преобразования Лапласа этой реакции.

В случае стабильной системы путем применения основной предельной теоремы операционного исчисления получено выражение для предела средней квадратичной реакции при $t \to \infty$ ($t$ — время).

В случае условностабильной системы получено выражение для главного члена средней квадратичной реакции, который оказывается пропорциональным $\sqrt{t}$.

Разобраны примеры: простой интегратор, простой гармонический осциллятор, броуновское движение. *Ю. Ф. Гальперин*

**5168. Об одном общем определении полосы пропускания.** Коломбо (Sur une définition générale de la bande passante. Colombo Sèrge), C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 6, 427—429 (франц.)

Рассматривается электрическая цепь типа четырехполюсника с проводимостью $1/Z(p) \doteq s(t)$, где $Z(p) \neq 0$ для $\mathrm{Re}\, p \geqslant 0$. Для функции $s(t)$ вводится понятие времени установления стационарного режима как проекции на ось $t$ отрезка касательной к графику $s(t)$ в точке перегиба между осью $t$ и прямой $s = s_{ст} = 1/Z_0$. Указывается, что никакое определение полосы пропускания не является приемлемым, если время установления для $s_1(t)$, где

$$s_1'(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s'(\xi) \frac{\sin \Omega_0 (t-\xi)}{t-\xi} d\xi,$$

не близко к времени установления для $s(t)$ (по величине, но необязательно по положению на оси $t$). *В. И. Левин*

**5169. Вероятности вибрационных переносов в диатомных молекулах. I. Фрейзер, Жармен** (Vibrational transition probabilities of diatomic molecules: I. Fraser P. A., Jarmain W. R.), Proc. Phys. Soc., 1953, **A66**, ч. 12, № 408, 1145—1152 (англ.)

Указанные вероятности измеряются квадратами интегралов

$$(v', v'') = \int_0^{\infty} \psi_1^{(v')} \psi_2^{(v'')} dr,$$

где $\psi_1^{(v')}$ и $\psi_2^{(v'')}$ — вибрационные волновые функции, соответствующие состояниям 1 и 2, между которыми происходит перенос. Пренебрегая ошибкой, возникающей при распространении интегрирования на всю ось $r$, можно свести интегралы $(v', v'')$ к интегралам

$$J(k, l) = \int_{-\infty}^{\infty} dr \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\lambda_1 e^{-\alpha_1 r} + \lambda_2 e^{-\alpha_2 r}\right]\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{-\left[\left(\frac{K_1 - 1}{2} - k\right)\alpha_1 r + \left(\frac{K_2 - 1}{2} - l\right)\alpha_2 r\right]\right\},$$

которые, однако, также не выражаются через элементарные функции, если $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Параметры состояния $\alpha_1$ и $\alpha_2$ заменяются общим значением $\alpha = (\alpha_1 + \alpha_2)/2$ и $J(k, l)$ сводится к интегралу

$$J(k+l) = \int_{-\infty}^{\infty} dr \exp\{-[\lambda e^{-\alpha r}]\} \exp\{-[(K-1) -$$

$$-(k+l)\alpha r]\} = (1/\lambda)^{(K-1)-(k+l)} \Gamma(K-1-[k+l])/\alpha,$$

где $K = (K_1 + K_2)/2$, $\lambda = (\lambda_1 + \lambda_2)/2$. Аналогичные упрощения дают также возможность точно вычислить интегралы $(v', rv'')$ и $(v', r^2 v'')$. Приводятся явные формулы для $(v', v'')/(0, 0)$ при небольших целочисленных $v'$ и $v''$. *В. И. Левин*

**5170. Изменение напряженности электрического поля в прямоугольном волноводе, возбужденном от основной волны $H_{10}$ посредством прикрепления включенного тонкого провода круглого сечения.** Мюллер (Die Veränderung der elektrischen Feldstärke in einem in der Grundwelle $H_{10}$ angeregten rechteckigen Hohlkabel durch Einbau eines beschalteten kreisrunden dünnen Drahtes. Müller Reinhard), Arch. elektr. Übertrag., 1953, 7, № 9, 451—457 (нем.)

Рассмотрено изменение электрического поля в прямоугольном волноводе, вызванное наличием внутри диаметрально прикрепленного провода. Предполагается, что радиус провода $\rho$ мал по сравнению с длиной $\lambda$ возбуждающей волны $H_{10}$, а стороны $a$ и $b$ сечения волновода удовлетворяют неравенствам $\lambda/2 < a < \lambda$, $0 < b < \lambda/\sqrt{2}$. Волна $H_{10}$ распространяется в направлении оси волновода (оси $z$), и составляющие напряженности электрического и магнитного полей этой волны берутся в виде

$$E_x = 0,\ E_y = E_0 \cos(\pi x/a)\, e^{i(\omega t - \alpha z)},\ E_z = 0,$$

$$H_x = -(\lambda/\Lambda) E_0 \cos(\pi x/a)\, e^{i(\omega t - \alpha z)},$$

$$H_y = 0,\ H_z = -i(\lambda/2a) E_0 \sin(\pi x/a)\, e^{i(\omega t - \alpha z)}.$$

Возбужденная наличием провода волна ищется в виде $E_y = C H_0^{(2)}(kr)\, e^{i\omega t}$, где $H_0^{(2)}$ означает функцию Ханкеля второго рода, а $r$ — расстояние от провода. Выражение для $C$ получается из рассуждений о поле вблизи поверхности провода, причем применяются уравнения Максвелла. Оказывается, что $C$ пропорционален току $I$ в проводе. Суммарное электрическое поле в точке $(x, z)$ вне провода выражается, если пренебречь зависимостью от времени, формулой

$$E'(x, z) = E_0 \cos(\pi x/a)\, e^{-i\alpha z} - \pi k I F(x, z)/c,$$

где $F(x, z) = (4/a) \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-i|z|\alpha_{2n+1}}/\alpha_{2n+1}) \times$

$\times \cos[(2n+1)\pi x/a]$, $\alpha_n = 2\pi\sqrt{1 - (n\lambda/2a)^2}/\lambda$,

а $c$ — скорость света.

Анализ решения задачи показывает, что волны возмущения, вызванные наличием провода, за исключением двух волн, быстро затухают. Каждая из этих волн распространяется в свою сторону от провода, совпадая по фазе с основной волной и накладываясь на основную волну. Рассмотрено условие, при котором волна, пройдя мимо провода, позади него полностью поглощается. Указаны изменения в решении задачи при некотором увеличении сторон прямоугольника сечения провода. Намечено практическое значение рассмотренной задачи о распространении очень коротких волн внутри волновода, причем прикрепленный провод означает приемник в виде детектора, болометра и т. п. *Н. А. Бразма*

**См. также:** 5065, 5144, 5286, 5287

## ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

**5171. О погружении нормированного полуупорядоченного пространства во второе сопряженное пространство. Вулих Б. З.,** Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 1, 91—99

В статье исследуются свойства погружения $KB$-линеала $X$ во второе сопряженное пространство $X^{**}$. Погружение: $x \longleftrightarrow F_x$, $x \in X$, $F_x \in X^{**}$ определяется равенством: $F_x(f) = f(x)$, где $f \in X^*$. Указываются необходимые и достаточные условия того, чтобы образ $X$ в $X^{**}$ был правильным подпространством, компонентой, совпадал с $X^{**}$. Попутно устанавливается связь между классами $(o)$ —, $(b)$— и вполне линейных функционалов в $X$. *А. Н. Балуев*

**5172. Об условно сходящихся рядах в пространстве $L^p$. Кадец М. И.,** Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 1 (59), 107—109

Результаты, полученные автором в его предыдущей работе (РЖМат, 1953, 339) для $n$-мерного евклидова пространства, обобщаются на пространство $L^p$. Доказывается, что 1) множество $N$ векторов $r_j$ из пространства $L^p$, сумма которых равна нулю, можно упорядочить так, что

$$\max_{\nu} \left\| \sum_{1}^{\nu} r_j \right\| < B_p \left\{ \sum_{1}^{N} \| r_j \|^2 \right\}^{1/2} \text{ при } p > 2,$$

$$\max_{\nu} \left\| \sum_{1}^{\nu} r_j \right\| < B_p \left\{ \sum_{1}^{N} \| r_j \|^p \right\}^{1/p} \text{ при } 1 < p \leqslant 2,$$

где $B_p$ — постоянная, зависящая только от $p$, 2) область сумм условно сходящегося ряда векторов в $L^p$ есть подпространство, если члены ряда удовлетворяют одному из двух условий:

$$\sum_{1}^{\infty} \| r_k \|^2 < \infty \quad \text{при } p > 2$$

или

$$\sum_{1}^{\infty} \| r_k \|^p < \infty \quad \text{при } 1 < p \leqslant 2.$$

Необходимость последних условий не выяснена. *И. П. Макаров*

**5173. О сходимости функционалов, представимых в виде интегралов, на некоторых классах ограниченных функций. Орлич** (On the convergence of functionals representable as integrals over some classes of bounded functions. Orlicz W.), Studia math. (Warszawa), 1953, **13**, № 2, 208—217 (англ.)

В работе устанавливаются необходимые и достаточные условия сходимости последовательности линейных функционалов

$$l_n x = \int_a^b f_n(t)\, x(t)\, dt, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \qquad (1)$$

где $f_n(t)$ интегрируемы в $(a, b)$, а $x(t)$ принадлежит одному из следующих классов функций:

$(K_1)$ — класс ограниченных функций на отрезке $[a, b]$, всюду непрерывных на $[a, b]$, за исключением фиксированной точки $t_0 \in (a, b)$, и равных нулю в точке $t_0$.

$(K_2)$ — класс ограниченных и непрерывных функций на всей числовой прямой $(-\infty, +\infty)$.

$(K_3)$ — класс ограниченных функций на отрезке $[a, b]$, равных нулю в некоторой фиксированной точке $t_0 \in (a, b)$, имеющих ограниченные вариации в промежутках $[a, t_0 - \varepsilon]$, $[t_0 + \varepsilon, b]$ при любом $\varepsilon$

$(K_4)$ — класс функций, ограниченных в промежутке $(-\infty, +\infty)$ и имеющих ограниченную вариацию в любом конечном интервале.

$(K_1^*)$ — (нелинейный) класс функций, ограниченных на $[a, b]$ и разрывных не более чем в одной точке.

В каждом из классов $(K_i)$ вводится норма $\| x \| = \sup | x(t) |$, где верхняя грань берется по тому промежутку, на котором заданы функции $x(t)$.

Установлены, например, следующие теоремы.

Теорема 1. Последовательность (1) сходится для всякого $x \in (K_1)$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$(\alpha)$ $\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_a^b | f_n(t) |\, dt < +\infty$,

$(\beta)$ функции

$$\Phi_n(t) = \int_a^t | f_n(\tau) |\, d\tau$$

равностепенно непрерывны в точке $t_0$,

$(\gamma)$ функции

$$F_n(t) = \int_a^t f_n(\tau)\, d\tau$$

сходятся по мере на $[a, b]$

$(\delta)$ последовательность $F_n(b)$ сходится.

В том случае, когда $x(t) \in C$, вопрос о сходимости последовательности (1) был рассмотрен Г. М. Фихтенгольцем (Bull. Acad. Roy. Belgique, 1936, **22**, 26—33).

Теорема 4. Последовательность (1) сходится для всякой функции $x(t) \in (K_3)$ тогда и только тогда, когда выполнены (β) и следующие условия:

$$(\lambda) \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \max_{[a,\,b]} |F_n(t)| < \infty,$$

$(\mu)$ $F_n(t)$ сходятся на $[a, b]$.

Полученные теоремы применяются к доказательству некоторых предложений о расходимости сингулярных интегралов

$$\int_a^b K_n(s, t)\, x(t)\, dt,$$

где $K_n(s, t)$ интегрируема на $[a, b]$ для всякого $s \in [a, b]$, и о расходимости частных сумм разложения некоторых функций $x(t)$ по полной ортонормированной системе в пространстве $L^2(a, b)$.

*М. М. Вайнберг*

**5174. О линейной независимости последовательности элементов в банаховом пространстве. Эрдёш, Страус** (On linear independence of sequences in a Banach space. Erdös P., Straus E. G.), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 4, 689—694 (англ.)

Рассматриваются различные определения понятия линейной независимости последовательности единичных элементов в банаховом пространстве:

(I) $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x_n = 0$ влечет $c_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

(II) $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} x_n = 0$ и $\sup_k |c_n^{(k)}| < \infty$

влечет $\lim_{k\to\infty} c_n^{(k)} = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

(III) $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} x_n = 0$ влечет $\lim_{k\to\infty} c_n^{(k)} = 0$ $(n=1, 2, \ldots)$

Доказывается, что если элементы последовательности $\{x_n\}$ линейно независимы в алгебраическом смысле, то существует подпоследовательность $\{x_{n_i}\}$ элементов, линейно независимых в смысле (I) и (II).

Приводится пример, показывающий, что этот факт не имеет места, если линейную независимость понимать в смысле третьего определения.

В статье имеется несколько опечаток; одна из них существенная: в (II) неправильно указано: $|c_n^{(k)}| < \varphi(k)$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$ (при этом (II) оказывается эквивалентным (III), так как написанное неравенство является следствием соотношения $\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^{(k)} x_n = 0$) .

*Г. П. Акилов*

**5175. Теорема о структуре линейных операторов. Алексевич** (A theorem on the structure of linear operations. Alexiewicz Andrzej), Studia math. (Warszawa), 1953, **14**, № 1, 1—12 (англ.)

Автор обобщает результаты, полученные им раньше в работе «О некоторых теоремах С. Сакса» (Studia math. (Warszawa), 1953, **13**, 18—29). Пусть $\mu$ — конечная сепарабельная мера, определенная на σ-алгебре $E$ подмножеств некоторого множества $T$ (Хальмош, Теория меры, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953, 33, пример 4) и пусть $L$ — линейное пространство. Если $y$ является функцией, отображающей $T$ в $L$, и $e \in E$, то $y_e$ обозначает следующую функцию: $y_e(t) = y(t)$, если $t \in e$, и $y_e(t) = 0$, если $t \in T - e$. Пусть $Y$ — пространство типа $(F)$, элементами которого являются функции, отображающие $T$ в $L$, такое, что: $(a_1)$ если $y \in Y$ и $e \in E$, то $y_e \in Y$ и $\|y_e\| \leqslant \|y\|$; $(a_2)$ если $\mu(e_n) \to 0$, то $\|y_{e_n}\| \to 0$. Пусть, далее, $B$ — аналитическое множество в пространстве $Y$ такое, что $y_e \in B$ для любого $y \in B$ и $e \in E$. Пусть, наконец, $U$ — линейный оператор, отображающий некоторое сепарабельное пространство $X$ типа $(F)$ в пространство $Y$.

Теорема 1. Существуют разложение $T = e + h$ $(e, h \in E)$ и множество $R \in X$, дополнение которого есть множество первой категории, такие, что 1) для каждого $x$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $e_1 \in E$, что $\mu(e - e_1) < \varepsilon$ и $U(x)_{e_1} \in B$; 2) $U(x)_{h_1} \notin B$ для каждого $x \in R$ и любого множества $h_1 \subset h$ $(h_1 \in E)$ положительной меры.

Теорема II. Если условие $y_{e_n} \in B$ для $n = 1, 2 \ldots$ влечет за собой $y_e \in B$, где $e = e_1 + e_2 + \ldots$, то существуют разложение $T = e + h$ $(e, h \in E_1)$ и множество $R \subset X$, дополнение которого есть множество первой категории, такие, что 1) $U(x)_e \in B$ для любого $x \in X$, 2) $U(x)_{h_1} \in B$ для каждого $x \in R$ и любого множества $h_1 \subset h$ $(h_1 \in E)$ положительной меры.

Принимая за $Y$ пространство всех последовательностей $\{\eta_n(t)\}$ измеримых функций, определенных на $T$, и подбирая различным образом множество $B \subset Y$, автор получает как непосредственные следствия из теорем I и II несколько теорем о последовательностях линейных операторов, отображающих $X$ в пространство функций, измеримых на $T$. Принимая за $Y$ пространство некоторых функций $\eta_\lambda(t)$ (где $t \in T$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$), автор получает несколько теорем об операторах, зависящих от параметра $\lambda$, отображающих $X$ в пространство функций, измеримых на $T$. Эти теоремы являются обобщениями теоремы С. Сакса о последовательностях линейных операторов со значениями в пространстве измеримых функций (Saks S., Trans. Amer. Math. Soc., 1932, **35**, 549—556; 1937, **41**, 160—170).

*R. Sikorski*

**5176. Вполне непрерывные нормальные операторы, обладающие свойством *L*. Каплански** (Completely continuous normal operators with property *L*. Kaplansky Irving), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 4, 721—724 (англ.)

В комплексном гильбертовом пространстве рассматриваются вполне непрерывные нормальные

операторы $A$ и $B$ со спектрами

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \text{ и } \mu_1, \mu_2, \ldots \quad (1)$$

соответственно.

Операторы $A$ и $B$ обладают свойством $L$ по отношению к последовательностям $\{\lambda_n'\}$ и $\{\mu_n'\}$, входящим соответственно в $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$, если выполнены следующие условия.

(1) последовательность $\{\lambda_n'\}$ состоит из всех отличных от нуля характеристических чисел оператора $A$, причем каждое из них берется столько раз, какова его кратность;

(2) если при фиксированных $\alpha$ и $\nu$ существует $k$ значений номера $i$, при которых $\nu = \alpha\lambda_i' + \mu_i'$, то оператор $C = \alpha A + B$ имеет $\nu$ своим характеристическим числом кратности $\geqslant k$. Оператор $C$ не всегда нормален, и кратностью $\nu$ по отношению к $C$ считается число измерений объединения нулевых подпространств операторов $C - \nu E$, $(C - \nu E)^2, \ldots$

Теорема 1. Если $A$ и $B$ вполне непрерывные нормальные операторы со свойством $L$ по отношению к $\{\lambda_n'\}$, $\{\mu_n'\}$ и все $\mu_n' \neq 0$, то $A$ и $B$ перестановочны.

Если $A$ и $B$ — самосопряженные операторы, заменим $\{\lambda_n'\}$ и $\{\mu_n'\}$ соответственно на $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ и будем говорить, что $A$ и $B$ обладают свойством $L$, если выполнено условие (2).

Теорема 2. Если $A$ и $B$ — вполне непрерывные, самосопряженные операторы со свойством $L$, то $A$ и $B$ перестановочны.

Автор считает подлежащим исследованию вопрос о замене $\{\lambda_n'\}$ и $\{\mu_n'\}$ на $\{\lambda_n\}$ и $\{\mu_n\}$ также и для несамосопряженных нормальных операторов.

Результаты автора обобщают результаты Моцкина и Таусской, а также Вигмана, полученные для матриц со свойством $L$ (РЖМат, 1953, 585).

*Д. М. Котелянский*

**5177. Об итерации гильбертова преобразования комплексного распределения.** Хорват (Sur l'itération de la transformée de Hilbert d'une distribution complexe. Horváth Jean), C. r. Acad. sci., 1954, **237**, № 23, 1480—1482 (франц.)

Референтом (Докл. АН СССР, 1936, **2(11)**, № 1 (87), 3—5; Успехи матем. наук, 1948, **3**, № 25, 29—112) были получены формулы композиции двойных сингулярных интегралов. Этим формулам можно придать следующий вид: если $f(x, y)$—суммируемая в квадрате на плоскости функция, $r\exp i\vartheta = \xi - x + i(\eta - y)$ и

$$Hf = \frac{1}{2\pi}\iint f(\xi, \eta)\, r^{-2} \exp(i\vartheta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$H_k f = \frac{1}{2\pi}\iint f(\xi, \eta)\, r^{-2} \exp(ik\vartheta)\, d\xi\, d\eta,$$

то

$$H_k f = \frac{1}{k} H^k f, \quad k > 0, \quad (1)$$

$$H_k f = \frac{(-1)^{k-1}}{k} H^k f, \quad k < 0. \quad (2)$$

Пусть $T$ — распределение в смысле Л. Шварца (Schwartz L., Théorie des distributions, Hermann, P., 1950—1951) такое, что произведение $(1 + |z|^2)^{-1} T$, где $z = x + iy$ принадлежит пространству, сопряженному с функциональным пространством $L_1$. Автор называет гильбертовым преобразованием распределения $T$ свертку (также понимаемую в смысле Л. Шварца) $\mathfrak{H} T = T * H$. В силу результатов Кальдерона и Зигмунда (Calderon A. P., Zygmund A., Acta Math., 1952, **88**, № 1—2, 85—139) $\mathfrak{H} T$ принадлежит пространству, сопряженному с $L_p$, если $p > 1$ и $T$ принадлежит тому же пространству. Отсюда вытекает существование итераций $\mathfrak{H}^k T$.

Автор распространяет формулу (1), которую он ошибочно считает пригодной и для $k < 0$, на тот случай, когда функция $f(x, y)$ заменяется распределением $T$, если только $T$ принадлежит пространству, сопряженному с $L_p$, $p > 1$. Доказательство основано на формуле

$$F(z^k/|z|^{k+2}) = (-i)^k \zeta^k/|\zeta|^k, \quad (3)$$

где $z$ и $\zeta$—комплексные переменные и $F$ — символ преобразования Фурье. Формулу (3) автор получает, опираясь на некоторые вычисления Л. Шварца.

*С. Г. Михлин*

**5178. О последовательностях операторов в полном векторном пространстве.** Гал (On sequences of operations in complete vector spaces. Gál I. S.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 8, 527—538 (англ.)

Две хорошо известные теоремы (принцип равномерной ограниченности и принцип сгущения особенностей) из «Курса функционального анализа» С. Банаха с типичными примерами их применения (существование непрерывной функции с расходящимся рядом Фурье или с расходящейся последовательностью интерполяционных полиномов Лагранжа, в одной точке и на счетном множестве). *Г. Е. Шилов*

**5179. Статистическая эргодическая теорема в локально-выпуклом линейном топологическом пространстве.** Альтман (Mean ergodic theorem in locally convex linear topological spaces. Altman M.), Studia math. (Warszawa), 1953, **13**, № 2, 190—193 (англ.)

В статье Косаку (Kosaku Yosida, Proc. Imp. Acad., Japan, 1938, **14**, 292—294) дано следующее обобщение эргодической теоремы И. Неймана (J. v. Neumann).

Пусть линейное отображение $T$ пространства Банаха $B$ в себя удовлетворяет условиям:

1) Последовательность $\{T^n(x)\}_{1 \leqslant n < \infty}$ ограничена для каждого $x \in B$. 2) $T$ слабо вполне непрерывно.

Тогда последовательность $\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i(x)\right\}_{1 \leqslant n < \infty}$ сходится сильно к некоторому элементу $y$ и $Ty = y$.

Доказывается аналогичная теорема для локально-выпуклых линейных топологических пространств.

*Д. П. Мильман*

**5180. Сгущение особенностей.** Целлер (Kondensation von Singularitäten. Zeller K.), Math.-Phys. Semesterber., 1953, **3**, № 3/4, 207—213 (нем.)

Приводятся наглядные примеры разных типов доказательств существования. Дается элементарное доказательство существования нигде не дифферен-

цируемой функции методом «решета». Именно, показывается, что множество функций в пространстве $C[0,1]$, имеющих конечные производные числа хотя бы в одной точке, есть множество первой категории в $C$. *Ф. В. Широков*

5181. **Исправление к работе «Индекс Лерея-Шаудера и типовые числа Морса в гильбертовом пространстве».** Рот е (Correction to the paper «Leray-Schauder index and Morse type numbers in Hilbert space». Rothe E. H.), Ann. Math., 1953, 58, № 3, 593—594 (англ.)

Автор указывает, как исправить неверное доказательство неравенств (5,3), (5,6) и теоремы 7 его предыдущей работы (Ann. Math., 1952, 55, 433—467). *М. М. Вайнберг*

См. также: 5073, 5139 Д, 5166, 5182, 5243

## ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

5182. **О равнораспределенности сумм независимых случайных величин.** Роббинс (On the equidistribution of sums of independent random variables. Robbins Herbert), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, 4, № 5, 786—799 (англ.)

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и $S_k = X_1 + \ldots + X_k$. Предположим, что функция $h(x)$ удовлетворяет одному из следующих трех условий: 1) является почти периодической, 2) является периодической с периодом $\alpha$ и интегрируемой по Риману на отрезке $[0, \alpha]$, причем, если распределение величин $X_k$ решетчатое с шагом $d$, то числа $\alpha$ и $d$ несоизмеримы, 3) является ограниченной и имеет предел при $|x| \to \infty$. Доказывается следующая теорема: с вероятностью 1

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h(S_i) = M_h,$$

где

$$M_h = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} h(t)\, dt,$$

если распределение величин $X_i$ нерешетчатое, и

$$M_h = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^{n} h(di),$$

где $d$ — шаг распределения величин $X_i$, если это распределение решетчатое.

Аналогичная теорема доказывается и для случайного процесса $X(t)$ с непрерывным временем (здесь изучается поведение $\frac{1}{T}\int_0^T h(X(t))\, dt$) и независимыми приращениями. При этом предполагается, однако, что при любом $\lambda$ математическое ожидание $M\{\exp i\lambda[X(t) - X(0)]\} = O(t^{-\delta})$ при $t \to \infty$, где показатель $\delta > 0$ может зависеть от $\lambda$. Этому условию удовлетворяет, например, броуновское движение.

Доказательства проводятся элементарными методами.

Раздел 5 работы содержит результаты, сообщенные автору Какутани. Здесь показывается, что из одной теоремы Какутани (Kakutani S., Proc. of the Second Berkeley Symposium on math. Statistics and Probability, University of California Press, 1951, 247—261) можно без труда получить результат, аналогичный теореме автора, для случайных величин, принимающих значения из произвольной компактной топологической группы. Указывается, что основная теорема автора может быть сведена к этому случаю при помощи приема «компактификации» процесса. *Р. Л. Добрушин*

5183. **Обобщенные распределения типа Пуассона. IV. (Замечания по теории дифференциальных процессов).** Прекопа (On composed Poisson distributions. IV. (Remarks on the theory of differential processes). Prékopa András), Acta math. Acad. sci. hung., 1952, 3, № 4, 317—325 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.; резюме русск.)

Пусть $\xi_t$ — случайный процесс на конечном отрезке времени $I$. Обозначим через $\xi_J$ приращение $\xi_t$ на отрезке $J \subset I$ и положим $W_\lambda(J) = P\{\xi_J = \lambda\}$. Допустим, что выполнены следующие условия: A) приращения $\xi_J$ на неперекрывающихся интервалах независимы; B) $\xi_J$ может принимать значения только из данного счетного множества $\lambda_0 = 0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$, не зависящего от $J$; C) $P\{\xi_J \neq 0\} \to 0$, когда интервал $J$ стягивается в точку. Доказывается, что тогда формула Леви—Хинчина для логарифма характеристической функции безгранично делимого закона распределения величины $\xi_I$ может быть приведена к виду

$$\log f(u, I) = \sum_{k=1}^{\infty} C_{\lambda_k}(I)(e^{i\lambda_k u} - 1), \qquad (1)$$

где

$$C_{\lambda_k}(I) = \int_I W_{\lambda_k}(J), \quad \lambda_k \neq 0, \qquad (2)$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_{\lambda_k}(I) = \int_I [1 - W_0(J)] < \infty. \qquad (3)$$

Интегралы в (2) и (3) понимаются в смысле Бёркиля (см. Сакс С., Теория интеграла, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1949, 246). Доказательство проводится с помощью теории почти периодических функций. Для того случая, когда все $\lambda_k$—целые числа, дается весьма сложное явное выражение $W_\lambda(I)$ через $C_\lambda(I)$.

Примечание референта. Условие B) в резюме на русском языке сформулировано неточно.
*А. А. Юшкевич*

**5184. О стохастическом поведении благоприятствующих повторений. Франкс** (Sur le comportement stochastique des itérations favorables. Franckx Ed.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, 22, № 8—10, 417—420 (франц.)

Рассматривается последовательность испытаний Бернулли с вероятностью благоприятствующего исхода $p$. Пусть $\xi_k(n)$— число номеров $l \leqslant n-k+1$ таких, что $l$-ое, $(l+1)$-ое, ..., $(l+k-1)$-ое испытания имеют благоприятный исход. Доказывается, что при $n \to \infty$ величина $\frac{\xi_k(n)}{n} - p^k \to 0$ по вероятности равномерно по $k$. *Р. Л. Добрушин*

**5185. Чисто аналитическое определение вероятности. Эро** (Une définition purement analytique de la probabilité. Eyraud Henri), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 597—598 (франц.)

**5186. Некоторые нелинейные модели роста популяции и распространения эпидемии. Уитл** (Certain nonlinear models of population and epidemic theory. Whittle P.), Skand. Aktuarietidskr., 1952, 35, 211—222 (журнал вышел из печати в 1953 г.)(англ.)

Изучаются стохастические модели роста популяции, распространения эпидемий и т. д. Пусть $n_i(t)$ означает число объектов типа $i$ в момент времени $t$,

$$\Phi(\theta_1, \theta_2, \ldots, t) = M(e^{\theta_1 n_1 + \theta_2 n_2 + \cdots}).$$

$\Phi$ удовлетворяет уравнению следующего вида:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = L\left(\theta, \frac{\partial}{\partial \theta}, t\right)\Phi.$$

В случае, если оператор $L$ не зависит от $t$, автор рекомендует представлять решение в виде ряда

$$\Phi = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} L^j \Phi_0, \text{ где } \Phi_0 = \Phi(\theta_1, \theta_2, \ldots, 0).$$

Предлагаются методы вычисления. В случае популяции первоначального объема $n$, состоящей из объектов одного типа, даются условия, при которых $\mu_1(t) = Mn(t) = T(t)(1 + O(n^{-1}))$, где $T(t)$ есть объем совокупности детерминированной модели, соответствующей изучаемому процессу. Даются выражения для среднего и дисперсии с остаточным членом порядка $n^{-2}$. Подробно рассматриваются «логистическая» модель и модель инфекции.
*T. E. Harris*

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 890.

**5187. О стохастических процессах в биологии. Рид** (On stochastic processes in biology. Reid A. T.), Biometrics, 1953, 9, № 3, 275—289 (англ.)

Обзорная статья. Библиография, 40 названий.
*Б. А. Севастьянов*

**5188 К. Методы Монте-Карло. Конференция по методам Монте-Карло, состоявшаяся в Гейнсвилле (США) 16—17 марта 1954 г.** (Monte Carlo methods. A symposium on Monte Carlo methods, sponsored by the Aeronautical research laboratory, Wright air development center, conducted by the Statistical Lab., Univ. Florida, Gainesville, March 16—17, 1954), Computers and Automation, 1954, **3**, № 1, 16 (библ.)

**5189 РЕЦ. Стохастические процессы. Дуб** (Stochastic processes. Doob J. L., VIII + 654 pp Chapman and Hall, Ltd., L., 1953, 80 s.) [Рецензия: **Стайгант** (Stigant S. Austen); Beama J., 1954, **61**, № 199, 25, 27 (англ.)]

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

**5190. Асимптотические разложения для критериев согласия А. Н. Колмогорова и Н. В. Смирнова. Королюк В. С.**, Докл. АН СССР, 1954, 95, № 3, 443—446

Пусть $T_m(t)$ и $S_n(t)$ — две эмпирические функции распределения, составленные из двух независимых выборок объемов $m$ и $n$ из одного и того же непрерывного распределения. Приводятся следующие теоремы (всюду $p$ — целое положительное число, $p \leqslant 11$, $z > 0$, $N = n + m$):

Теорема 1. В точках скачков функции распределения максимума разности между двумя эмпирическими кривыми распределения при $z = O\left(\sqrt[4]{\frac{nm}{N}}\right)$ имеет место формула

$$\Phi^+_{mn}(z) = P\left\{\sqrt{\frac{nm}{N}} \sup_{-\infty<t<\infty} [T_m(t) - S_n(t)] < z\right\} =$$

$$= 1 - e^{-2z^2}\left[1 - \sqrt{\frac{nm}{N}}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right)\frac{2z}{3} + \right.$$

$$\left. + \frac{m^2 + mn + n^2}{Nmn}\frac{2z^2}{3}\left(1 - \frac{2z^2}{3}\right)\right] +$$

$$+ O\left[\left(\frac{m}{Nn}\right)^{3/2} z^p e^{-2z^2}\right].$$

Теорема 3. В точках скачков функции распределения максимума модуля разности между двумя эмпирическими кривыми распределения при $z = O\left(\sqrt[6]{\frac{nm}{N}}\right)$ имеет место формула

$$\Phi_{nm}(z) = P\left\{\sqrt{\frac{nm}{N}} \sup_{-\infty<t<\infty} |T_m(t) - S_n(t)| < z\right\} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2z^2} + \frac{m^2 + mn + n^2}{Nmn} \times$$

$$\times \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2z^2}{3}\left(1 - \frac{2k^2z^2}{3}\right) e^{-2k^2z^2} +$$

$$+ O\left[\left(\frac{m}{Nm}\right)^{3/2} z^p e^{-2z^2}\right].$$

Если в теоремах 1 и 3 перейти к пределу при $m \to \infty$, то получаются соответствующие асимптотические разложения для распределений максимума разности и максимума модуля разности между теоретической и эмпирической кривыми распределения (теоремы 2 и 4). Доказательства лишь намечены.

*Б. А. Севастьянов*

**5191. О мощности одностороннего критерия соответствия для непрерывных функций распределений. Бирнбаум** (On the power of a one-sided test of fit for continuous probability functions. Birnbaum Z. W.), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 3, 484—489 (англ.)

Пусть $F_n(x)$—эмпирическая функция распределения, построенная на основании $n$ независимых наблюдений величины $X$ с законом $F(x)$ из класса $\{F\}$ непрерывных законов. Вероятность $P_n(\varepsilon) = P\{\sup[F(x) - F_n(x)] \leqslant \varepsilon\}$ $(\varepsilon > 0)$ не зависит от $F(x)$; точное выражение этой вероятности получено впервые референтом (Успехи матем. наук, 1944, **10**, 179—206) В работе автора (Ann. math. Statistics, 1951, **22**, 592—596) эта вероятность табулирована для некоторых значений $\varepsilon$ и $n$. В настоящей заметке рассматривается мощность непараметрического критерия проверки гипотезы $F(x) = H(x)$ относительно альтернативы $F(x) = G(x)$ такой, что $\sup_{-\infty<x<\infty} [H(x) - G(x)] = \delta > 0$, основанного на указанной вероятностной оценке верхней границы односторонних уклонений в случае, когда $H(x)$ и $G(x)$ — два распределения из $\{F\}$. В качестве нижнего предела мощности автор получает $1 - I_{u_0}(j+1, n-j)$; $I_x(p, q)$ обозначает неполную бэта-функцию, $u_0 = H(x_0) - \delta$, $j = [n(H(x_0) - \varepsilon)]$ и $x_0$ — точка, в которой достигается максимальное уклонение $H$ от $G$. Верхним пределом мощности является $1 - P_n(\varepsilon - \delta)$.

*Н. В. Смирнов*

**5192. Некоторые простые приближенные критерии для распределений Пуассона. Кокс** (Some simple approximate tests for Poisson variates. Cox D. R.), Biometrika, 1953, 40, ч. 3—4, 354—360 (англ.)

Пусть вероятность того, что за фиксированный промежуток времени длины $t$ некоторое событие произойдет $n$ раз, определяется формулой Пуассона с параметром $\lambda t$. Известно, что если $n$ фиксировано, то время $t$ до $n$-го наступления распределено как $(2\lambda)^{-1}\chi^2_{2n}$.

Поэтому, если при фиксированных $n_1$ и $n_2$ произвести два независимых наблюдения и обозначить через $t_1$ (соответственно $t_2$) время до $n_1$-го (соответственно $n_2$-го) наступления события при первом (соответственно втором) наблюдении, то отношение

$$\frac{\lambda_1 t_1 n_2}{\lambda_2 t_2 n_1}$$

будет иметь $F$-распределение с $(2n_1, 2n_2)$ степенями свободы. Это обстоятельство может быть использовано для проверки тех или иных гипотез относительно отношения $\lambda_1/\lambda_2$.

Автор утверждает, что аналогичный результат может быть получен, когда $t_1$ и $t_2$ фиксированы, а $n_1$ и $n_2$ случайны.

Именно он показывает, что в этом случае отношение

$$\frac{t_1\left(n_2 + \frac{1}{2}\right)\lambda_1}{t_2\left(n_1 + \frac{1}{2}\right)\lambda_2}$$

имеет приближенно $F$-распределение с $(2n_1 + 1, 2n_2 + 1)$ степенями свободы. Степень приближения иллюстрируется таблицами.

*С. Х. Туманян*

**5193. Распределение квазиразмахов в выборках из нормальной совокупности. Кадуэлл** (The distribution of quasi-ranges in samples from a normal population. Cadwell J. H.), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 4, 603—613 (англ.)

Указывается метод приближенного вычисления плотности вероятности и моментов статистики

$$w_r = x_{n-r} - x_{r+1},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — расположенные в порядке возрастания результаты выборки из нормальной совокупности. Показано, что до $n = 17$ наиболее эффективной статистикой этого типа для оценки стандартного отклонения исходной совокупности является размах $w_0$; начиная с $n = 17$ до $n = 31$ наиболее эффективной статистикой является $w_1$; далее роль такой наиболее эффективной статистики переходит к $w_2$ и сохраняется за ней приблизительно до $n = 50$. Для выборок объема $10 \leqslant n \leqslant 30$ приводятся значения первых моментов величины $w_1$ и таблица значений $w_1^p$, определяемых соотношением

$$P(w_1 < w_1^p) = p$$

для вероятностей $p = 0{,}001$; $0{,}01$; $0{,}025$; $0{,}05$; $0{,}95$; $0{,}975$; $0{,}99$; $0{,}999$. Метод сравнения эффективности двух оценок вида $w_r + \lambda w_s$ иллюстрируется численными подсчетами, относящимися к сравнению $w_0 + \lambda w_1$ и $w_1 + \lambda w_2$.

*А. А. Петров*

**5194. Существенно полный класс разрешающих функций для некоторых стандартных последовательных проблем. Собел** (An essentially complete class of decision functions for certain standard sequential problems. Sobel Milton), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 3, 319—337 (англ.)

Пусть $X$ — случайная величина, имеющая распределение $G_\theta(x)$, представимое в виде

$$dG_\theta(x) = \psi(\theta)\, e^{\theta x}\, d\mu(x),$$

где $\theta$ — числовой параметр, значение которого принадлежит некоторому интервалу $\Omega$ с концами $\underline{\theta}$ и $\bar{\theta}$ $(-\infty \leqslant \underline{\theta} < \bar{\theta} \leqslant +\infty)$.

В таком виде из дискретных распределений могут быть представлены, например, биномиальное и пуассоновское, а из непрерывных — нормальное (с известной дисперсией) и экспоненциальное распределения.

Исследуются последовательные методы выбора между двумя гипотезами $H_1$: $\{\theta \leqslant \theta^*\}$ и $H_2$: $\{\theta > \theta^*\}$,

$\theta^* \in \Omega$. В работе существенно используются идеи и результаты А. Вальда (см., например, Wald A., Statistical decision functions, John Wiley and Sons, New York, 1950). Следующие определения принадлежат Вальду и предполагаются в работе известными. Статистической разрешающей функцией в случае рассматриваемой задачи называется функция

$$\delta(n, x_1, \ldots, x_n) = \{\delta_{n1}(x_1, \ldots, x_n), \delta_{n2}(x_1, \ldots, x_n), \delta_{n3}(x_1, \ldots, x_n)\},$$

зависящая от числа $n$ произведенных наблюдений случайной величины $x$ и полученных результатов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и указывающая вероятности $\delta_{n1}$, $\delta_{n2}$, $\delta_{n3}$ ($\delta_{n1} + \delta_{n2} + \delta_{n3} = 1$) принятия каждого из следующих трех решений: а) выбрать гипотезу $H_1$, б) выбрать гипотезу $H_2$, в) произвести дополнительное наблюдение.

Пусть $W(\theta, j)$, $j = 1, 2$, — функция потерь (loss function), характеризующая материальные потери, вызванные принятием гипотезы $H_j$, когда истинное значение параметра распределения равно $\theta$, и $C(n)$ — функция, характеризующая затраты, связанные с проведением $n$ наблюдений величины $X$. Риском $r(\theta, \delta)$ статистической разрешающей функции $\delta$ называется математическое ожидание суммы $C(n) + W(\theta, j)$ при значении параметра распределения равном $\theta$, где $n$ — число наблюдений, потребовавшихся для принятия окончательного решения, и $j$ — номер принятой гипотезы. Класс $C$ статистических разрешающих функций называется существенно полным в $D'$, если для каждого $\delta \in D'$ существует $\delta^* \in C$ такое, что $r(\theta, \delta^*) \leqslant r(\theta, \delta)$ для всех $\theta \in \Omega$.

Основной результат работы состоит в следующем. Положим $v = \sum_1^n x_i$, и пусть $\delta_{jn}(v)$ — вероятность принятия гипотезы $H_j$ при заданных $(n, v)$. Определим класс $A$ статистических разрешающих функций $\delta$ следующим образом: $\delta \in A$, если 1) $\delta$ зависит от результатов наблюдений только через $v$; 2) $\delta$ определяет последовательность интервалов $J_n$: $[a_{1n}, a_{2n}]$ таких, что а) производится следующее наблюдение, если $a_{1n} < v < a_{2n}$; б) эксперименты прекращаются как только $v \notin J_n$ и б$_1$) $H_1$ принимается, если $v < a_{1n}$; б$_2$) $H_2$ принимается, если $v > a_{2n}$; в) если $a_{1n} < a_{2n}$, то $\delta_{2n}(a_{1n}) = \delta_{1n}(a_{2n}) = 0$. Тогда класс $A$ существенно полон в классе $D_b$ всех статистических разрешающих функций с ограниченным риском ($\theta \in \Omega$) по крайней мере тогда, когда выполнены следующие условия:

1) $W(\theta, 1) = 0$ при $\theta < \theta_2$, $W(\theta, 2) = 0$ при $\theta > \theta_1$, $\theta_1 < \theta^* < \theta_2$ и $W(\theta, 1)$ — неубывающая, $W(\theta, 2)$ — невозрастающая ограниченные функции;

2) $C(n) = c_1 + c_2 + \cdots + c_n$, $\liminf nc_n \geqslant k > 0$;

3) пусть $\bar{x} = \frac{1}{n} v$, $S_{\bar{x}}$ — наименьший интервал, содержащий всевозможные значения $x$ для всех $n$, и $g_{\bar{x}}(\theta) = \psi(\theta) e^{\bar{x}\theta}$. Тогда а) для каждого $\bar{x} \in S_{\bar{x}}$ существует точка $\hat{\theta} = \hat{\theta}(\bar{x})$ такая, что $g_{\bar{x}}(\theta)$ строго возрастает на $[\theta, \hat{\theta}]$ и строго убывает на $[\hat{\theta}, \bar{\theta}]$, б) существуют точки $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2 \in S_{\bar{x}}$, $\bar{x}_1 < \bar{x}_2$ такие, что $\hat{\theta}(\bar{x}_1) \neq \hat{\theta}(\bar{x}_2)$ и $\theta_1 < \hat{\theta}(\bar{x}_i) < \theta_2$.

*И. И. Гихман*

**5195. О некоторых комбинаторных теоремах, относящихся к опытам с неполными блоками. Маджумдар** (On some theorems in combinatorics relating to incomplete block designs. Majumdar Kulendra N.), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 3, 377—389 (англ.)

Рассматриваются некоторые комбинаторные свойства планов опыта с неполными блоками и эффективные необходимые условия для существования аффинно разрешимых уравновешенных неполных блоков (у. н. б.).

Пусть $r$ — число повторений каждого варианта опыта, $v$ — число вариантов опыта в блоке, $b$ — число блоков и $\lambda$ — число блоков с одинаковыми парами вариантов опыта. Строится матрица $A$ порядка $v \times b$, характеристическая для опыта с у. н. б., в которой на пересечении $i$-ой строки и $j$-го столбца ставится 1 или 0, смотря по тому, имеется или не имеется $i$-ый вариант опыта в $j$-ом блоке. При помощи матрицы $A$ доказываются известное неравенство Р.Фишера $b \geqslant v$ и ряд теорем. Две из них:

Теорема 1. Если в плане опыта с неполными блоками каждая пара вариантов опыта встречается $\lambda$ раз и каждые два блока имеют $\lambda'$ одинаковых вариантов опыта, то мы имеем план с у. н. б.

Теорема 4. Если для данных $r$, $\lambda$ и четного $v$ существует симметрический план с у. н. б., то $r - \lambda$ равно точному квадрату.

*В. И. Романовский*

**5196 К. Элементы статистики. Фрайер** (Elements of statistics. Fryer H. C., 266 pp., John Wiley and Sons, Inc., N. Y., 1954, 4. 75 doll.), Science, 1953, **118**, № 3075, 22 (библ.)

**5197 К. Статистические выводы. Уокер, Джозеф** (Statistical inference. Walker Helen M., Joseph Lev, XI + 510 pp., Henry Holt and Co., New York, 1953, 6, 25 doll), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 4, 708 (библ).

**5198 РЕЦ. Статистические методы для социологов. Мак-Миллен** (Statistical methods for social workers. McMillen Wayne, XI + +564 pp., The University of Chicago Press, Chicago, 1952, 6, 75 doll.) [**Рецензия: Прайс** (Price Danielo), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, 48, № 262, 370—372 (англ.)]

**5199 РЕЦ. Математическая теория риска при страховании вложений. Т. I. Дубурдьё** (Théorie mathématique du risque dans les assurances de répartition. Vol. I. Doubourdieu J., 306 pp., Gauthier-Villars, P., 1952, 3500 fr.) [**Рецензия: (Н. F.)**, Math. Gaz., 1953, **37**, № 319, 65 (англ.)]

## ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

**5200. О распределении времени ожидания.** Смит (On the distribution of queueing times. Smith Walter L.), Proc. Cambrige Philos. Soc., 1953, 40, № 3, 449—461 (англ.)

Статья посвящена исследованию закона распределения $F(x)$ времени $v$ ожидания в очереди с одним обслуживающим устройством. При этом закон распределения $G(x)$ промежутка времени $t$ между двумя последовательными появлениями новых клиентов и закон распределения $H(x)$ времени $u$ обслуживания предполагаются, вообще говоря, произвольными. Все упомянутые промежутки времени считаются взаимно независимыми. Закон распределения разности $u-t$ (принимающей, в отличие от прежде упомянутых случайных величин, и отрицательные значения) обозначается через $K(x)$.

Основным орудием исследования служит получаемое для искомой функции $F(x)$ интегральное «уравнение очереди»

$$F(x) = -\int_0^\infty F(y)\, d_y K(x-y) \qquad (x>0).$$

От функций $F$, $G$, $H$, $K$ автор переходит к их преобразованиям Лапласа:

$$F^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x);$$

аналогичными соотношениями определяются $G^*(s)$ и $H^*(s)$, в то время как

$$K^*(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx}\, dK(x).$$

Эти четыре функции комплексной переменной $s$ подвергаются детальному исследованию, причем основной задачей служит изучение их аналитических свойств при некоторых допущениях общего характера относительно исходных законов распределения $G(x)$ и $H(x)$. В основном предполагается, что имеет место одно из двух: либо 1) существует $H'(x)=h(x)$ и для некоторого $\lambda>0$ функции $e^{\lambda x}h(x)$ и $e^{\lambda x}[1-G(x)]$ имеют ограниченную вариацию на $(0,\infty)$; либо 2) существует $G'(x)=g(x)$ и функции $e^{\lambda x}g(x)$ и $e^{\lambda x}[1-H(x)]$ — с ограниченной вариацией на $(0,\infty)$. В любом из этих предположений доказывается (лемма 1), что существует $K'(x)=k(x)$, функция $e^{\lambda|x|}k(x)$ — с ограниченной вариацией на $(-\infty,+\infty)$, и при любом $\varepsilon$ $(0<\varepsilon<\lambda)$ функция $K^*(s)$ — аналитическая в полосе $-\lambda+\varepsilon\leqslant\sigma\leqslant\lambda-\varepsilon$ $(s=\sigma+i\tau)$, причем $K^*(s)=0\left(\frac{1}{|\tau|}\right)$ при $|\tau|\to\infty$. Таким образом, в условиях леммы 1 уравнение очереди может быть записано в виде

$$F(x) = \int_0^\infty F(y)\, k(x-y)\, dy \quad (x>0).$$

Правая часть этого уравнения при $x<0$ сохраняет смысл и определяет собой некоторую функцию $F_1(x)$, по определению равную нулю при $x\geqslant 0$, причем

$$F_1^*(s) = \int_{-\infty}^0 e^{-sx} F_1(x)\, dx$$

— аналитическая функция от $s$ в полуплоскости $\sigma<\lambda$. При переходе к преобразованиям Фурье уравнение очереди дает

$$F^*(s)\left\{\frac{1-K^*(s)}{s}\right\} + F_1^*(s) = 0.$$

В дальнейшем функция $\frac{1-K^*(s)}{s}$ представляется в виде отношения двух функций $\frac{\Phi^+(s)}{\Phi^-(s)}$ таким образом, что в вытекающем отсюда соотношении

$$F^*(s)\,\Phi^+(s) = -F_1^*(s)\,\Phi^-(s)$$

правая и левая части представляют собою целые функции, ограниченность которых легко доказывается. Таким образом,

$$F^*(s) = A/\Phi^+(s),$$

где $A$ — постоянная. С другой стороны, для весьма широких классов распределений $H(x)$ удается показать, что, каково бы ни было $G(x)$, $\Phi^+(s)$ будет рациональной функцией, числитель и знаменатель которой имеют лишь простые вещественные корни. В частности, это будет всегда, если $1/H^*(s)$ есть многочлен относительно $s$. Это открывает путь к установлению целого ряда случаев, когда тип искомого закона распределения $F(x)$ полностью определяется типом закона $H(x)$ и совершенно не зависит от закона $G(x)$. Так, если $1/H^*(s)$ есть многочлен степени $n$, $F'(x)$ представляет собой линейную комбинацию из $n$ показательных функций, каково бы ни было $G(x)$. Если $H(x)$ есть показательный закон распределения, то закон $F(x)$ также будет показательным при любом $G(x)$. *А. Я. Хинчин*

**5201. Случайное блуждание, связанное с емкостью круглого плоского конденсатора.** Рейк (A random walk related to the capacitance of the circular plate condenser. Reich E.), Quart. Appl. Math., 1953, **11**, № 3, 341—345 (англ.)

Емкость конденсатора, состоящего из двух одинаковых бесконечно тонких проводящих дисков радиуса $a$, находящихся друг от друга на расстоянии $ka$, равна $C=a\mu/\pi$, где

$$\mu = \frac{k}{2}\int_{-1/k}^{1/k} f(t)\, dt,$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{\pi}\int_{-1/k}^{1/k} \frac{f(t)\, dt}{1+(x-t)^2} \qquad (-1/k\leqslant x\leqslant 1/k)$$

(Love E. R., Quart. J. Mech. Appl. Math., 1949, 2, 428—451). Автор показывает, что $f(x)$ равно среднему числу скачков до поглощения при случайном блуждании по прямой с поглощающими экранами в точках $-1/k$ и $1/k$, начинающемся из точки $x$, если скачки независимы и величина скачка распределена по закону Коши. При этом считается, что поглощение происходит на $n$-ом шаге, если впервые на $n$-ом шаге точка выходит за пределы отрезка $[-1/k,\ 1/k]$. Тогда $\mu$ оказывается сред-

ним числом скачков до поглощения при условии, что начальная точка $x$ выбирается случайно из интервала $[-1/k, 1/k]$. Предлагается использовать случайный эксперимент для практического вычисления емкости $C$. *А. А. Юшкевич*

**5202. Усталостное разрушение с точки зрения стохастической теории. Йокобори** (Fatigue fracture from the standpoint of the stochastic theory. Yokobori Takeo), J. Phys. Soc. Japan, 1953, 8, № 2, 265—268 (англ.)

Образец стали подвергается многократному действию циклов нагрузки одинаковой напряженности до тех пор, пока образец не разрушится. Число циклов до разрушения является случайной величиной $\xi$. Среднее значение и среднее квадратичное уклонение этой величины имеют порядок $10^4$. Предлагается следующая стохастическая модель изучаемого процесса. Число циклов $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где $\xi_1$ — число циклов до появления на образце повреждений и $\xi_2$ — число циклов от момента возникновения повреждений до разрушения образца. Предполагается, что $\xi_1$ и $\xi_2$ независимы и $P\{\xi_i > x\} = \exp(-m_i x)$. На статистическом материале показывается, что такая модель хорошо согласуется с опытными данными при надлежащим образом подобранных $m_1$ и $m_2$. Величины $m_1$ и $m_2$ находятся из физических соображений. *Р. Л. Добрушин*

**5203. Методы контроля качества. Ч. 7. Определение практических допусков. Шейнин** (Quality control methods. Part 7 — Determining practical tolerances. Shainin Dorian), Mach. Design, 1953, **25**, № 1, 150—155 (англ.)

**5204. О применении математической статистики в вопросах промышленного производства и технических измерений. Штейнхаус** (O zastosowaniu statystyki matematycznej do zagadnień produkcji przemysłowej i miernictwa technicznego. Steinhaus H.), Przegl. elektrotechn., 1954, **30**, № 1, 5—7 (польск.)

Популярная статья.

**5205. Безопасность сооружений и контроль качества поставок. Про** (La sécurité des constructions et le contrôle de la qualité des fournitures. Prot Marcel), Bull. Assoc. internat. congr. chemins fer., 1953, **30**, № 4, 207—231 (франц.)

Популярная статья, содержащая описания некоторых приемов выборочного приемочного контроля. *Г. И. Егудин*

**5206. РЕЦ. Технологические применения статистики. Типпетт** (Technological applications of statistics. Tippett L. H. C., IX + 189 pp., Williams ans Norgate. L., 1952, 15 s.) [**Рецензия: Ньюман** (Newman Dennis), J. Roy. Statist. Soc., 1953, **A116**, ч. 1, 88—89 (англ.)]

---

См. также: 5031 К, 5097, 5272, 5273, 5283 РЕЦ

## ГЕОМЕТРИЯ

**5207. Об одной теореме элементарной геометрии. Лауффер** (Ein Satz der elementaren Geometrie. Lauffer R.), Elem. Math., 1953, 8, № 6, 136 (нем.)

Приводится одно из известных доказательств теоремы Помпейю: всегда возможно построить треугольник, стороны которого равны расстояниям до вершин равностороннего треугольника $ABC$ от произвольной точки $D$, лежащей в плоскости треугольника. *С. И. Зетель*

**5208. Об одной конкурсной задаче для лицеев. Тоси** (Sopra un tema di concorso per i Licei. Tosi A.), Period. mat., 1953, **31**, сер. 4, № 3, 158—175 (итал.)

Задача по аналитической геометрии на конические сечения, их касательные и т. п.

**5209. Тройное векторное произведение. Любин** (Vector triple product. Lubin C. I.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 1, 42—43 (англ.)

Дается элементарно-геометрический вывод известного разложения векторного произведения $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ по векторам $\bar{b}$ и $\bar{c}$. *М. А. Акивис*

**5210. Теорема Штейница — Гросса о суммах векторов. Беренд** (The Steinitz — Gross theorem on sums of vectors. Behrend F. A.), Canad. J. Math., 1954, **6**, № 1, 108—124 (англ.)

Если $\sum_{j=1}^{N} r_j = 0$ $(|r_j| \leqslant 1)$ замкнутая ломаная в $n$-мерном пространстве и $r_j$ — векторы ее сторон, то всегда возможно так заново перенумеровать ее составляющие $r_j (j \to j')$, чтобы новая ломаная $\sum_{j-1}^{N} r_{j'} = 0$ целиком умещалась в шаре радиуса $|r| \leqslant R_n$, где $R_n$ зависит только от $n$. Для $R_n$ были получены оценки $R_n \leqslant 2(n+1)$ (Штейниц, Steiniz E., J. reine und angew. Math., 1913, **143**, 128—175; 1914, **144**, 1—40), $R_n^2 \leqslant 4R_{n-1}^2 + 1$ (Бергштрём, Bergström V., Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1930, **8**, 148—152). Автор доказывает неравенства $R_3 \leqslant 2{,}90\ldots$, $R_n < n$ $(n > 3)$. *Г. Е. Шилов*

**5211. Анри Брокар и геометрия треугольника. Гуггенбул** (Henry Brocard and the geometry of the triangle. Guggenbuhl Laura), Math. Gaz., 1953, **37**, № 322, 241—243 (англ.)

Отмечается роль в развитии геометрии треугольника французского офицера Анри Брокара (1845—1922), предложившего задачу о построении такой точки $O$ внутри данного треугольника $ABC$, чтобы углы

$OAB$, $OBC$ и $OCA$ были равны. Условиям этой задачи удовлетворяют две точки (точки Брокара). Приводится одно из решений задачи и соотношение $\operatorname{ctg}\omega = \operatorname{ctg}A + \operatorname{ctg}B + \operatorname{ctg}C$, связывающее угол Брокара $\omega = \angle OAB$ с углами данного треугольника. Через точки Брокара проходит окружность Брокара, построенная на отрезке $PK$ как на диаметре, где $P$ — центр описанной окружности и $K$ — точка пересечения симедиан (точка Лемуана). Заметим, что задача Бокара была поставлена и решена Крелле еще в 1816 г. *В. Ф. Рогаченко*

5212. **Круговые потенциалы. Пучки окружностей; точки Понселе.** Гамбье (Potentiels circulaires. Faisceaux de cercles; points de Poncelet. Gambier B.), J. math. pures et appl., 1953, 32, № 3, сер. 9, 185—201 (франц.)

В плоскости рассматривается точка $O$, которой сопоставляется величина $\varepsilon R^2$, где $\varepsilon = \pm 1$. Величина $MO^2 - \varepsilon R^2$, где $M$ — произвольная точка плоскости, называется круговым потенциалом, она же называется степенью точки $M$ относительно этого потенциала. Линейным пучком потенциалов называется совокупность потенциалов

$$MO''^2 - \varepsilon'' R''^2 = \frac{\lambda(MO^2 - \varepsilon R^2) + \mu(MO'^2 - \varepsilon' R'^2)}{\lambda + \mu} \quad (1)$$

при произвольном отношении $\lambda : \mu$. Среди них могут быть точки (точки Понселе), если $R'' = 0$. В случае окружностей $\varepsilon = \varepsilon' = 1$ они существуют, если базисные окружности $(O, R)$ и $(O', R')$ не пересекаются.

Геометрическое место точек, имеющих равные степени относительно двух потенциалов пучка, есть прямая — радикальная ось. Точки ее имеют одну и ту же степень относительно всех потенциалов пучка. Две точки $M$ и $M'$ называются сопряженными относительно потенциала $MO^2 - \varepsilon R^2$, если $OM \cdot OM' - \varepsilon R^2 = 0$. Два потенциала $MO^2 - \varepsilon R^2$ и $MO'^2 - \varepsilon' R'^2$ называются ортогональными; если $OO'^2 - \varepsilon R^2 - \varepsilon' R'^2 = 0$. Если $MO''^2 - \varepsilon'' R''^2$ ортогонален к $MO^2 - \varepsilon R^2$ и к $MO'^2 - \varepsilon' R'^2$, то он ортогонален ко всем потенциалам пучка и $O''$ лежит на радикальной оси этого пучка.

Если точка $t$ движется вдоль одной окружности (настоящей) линейного пучка (1), то отношение степеней ее относительно двух других окружностей $(O, R)$ и $(O', R')$ того же пучка постоянно. В этом случае прямая, соединяющая точку касания $M$ одной касательной из $t$ к окружности $(O, R)$ с точкой касания $M'$ любой касательной из $t$ к $(O', R')$ отсекает от этих окружностей хорды $MM_1$ и $M'M_1'$, отношение которых постоянно. Потенциалы линейного пучка (1) с центрами в точках $A$ и $A_1$, которые делят $OO'$ в отношении $\rho$ внешним и внутренним образом, таковы, что относительно первого потенциала Г будут сопряжены точки $M$ и $M'$, $M_1$ и $M_1'$; относительно второго $\Gamma_1$ сопряжены точки $M$ и $M_1'$, $M_1$ и $M'$, а потому прямая $MM'$ огибает некоторую кривую 2-го порядка $\gamma$.

Точка $A$ лежит на радикальной оси окружностей с диаметрами $MM'$ и $M_1M_1'$, а потому проекция ее $\alpha$ на $MM'$ имеет одинаковые степени относительно этих окружностей, откуда отношение степеней ее относительно окружностей $(O, R)$ и $(O', R')$ постоянно, т. е. $\alpha$ описывает окружность. Следовательно, точка $A$ и аналогично точка $A_1$ — фокусы огибаемой кривой $\gamma$.

Общие касательные окружностей $(O, R)$ и $(O', R')$ входят в семейство прямых $(M\,M')$, а потому кривая $\gamma$ принадлежит касательному пучку окружностей $(O, R)$ и $(O', R')$.

В заключение аналитически проверяются те же результаты для пучка кривых 2-го порядка.

*М. В. Васильева*

5213. **Кривые, образуемые посредством двух семейств плоских линий с двумя параметрами.** Лоран (Courbes engendrées par deux ensembles de lignes planes à deux paramètres. Lorent H.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, 22, № 8—10, 388—395 (франц.)

Формулируется задача: в плоскости зафиксирована декартова система координат и относительно нее заданы два семейства линий с двумя параметрами, связанными между собою данным уравнением, — требуется найти уравнение геометрического места общих точек сходственных линий этих семейств.

Решаются одиннадцать частных случаев этой общей задачи и отмечаются некоторые особенности получающихся при этом кривых. В последнем примере даются семейства линий $a(x^2 + y^2)^3 = 4b^2x^2y^2$ и $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ при условии, что параметры $a$ и $b$ связаны уравнением $a^{-2} + b^{-2} = r^{-2}$, $r = \text{const}$; исключение параметров из этих уравнений приводит к кривой 26-го порядка с 16-кратной точкой в начале координат.

Уравнения кривых, получаемые в пп. 4, 7, 9, 10, содержат ошибки, которые сказываются на заключениях автора о характере этих кривых.

Имеются опечатки. *К. К. Мокрищев*

5214. **Кривые, связанные с четырехсторонником. III. О гиперболе, центр которой принадлежит окружности ортополюсов Тебо.** Гийотен (Courbes associées à un quadrilatère. III. Sur une hyperbole dont le centre appartient au cercle des orthopoles de M. Thébault. Guillotin R.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, 22, № 8—10, 396—404 (франц.)

Автор исходит из четырехсторонника, образованного прямыми $\Delta_1$, $\Delta_2$, $\Delta_3$, $\Delta_4$, принадлежащими одной плоскости. На каждой из указанных прямых фиксируется по произволу направление. Полученные ориентированные прямые автор называет осями и обозначает через $d_1$, $d_2$, $d_3$, $d_4$.

В 1952 г. Тебо (Thébault, Mathesis, 1952, 247) было доказано, что поляры $d_1'$, $d_2'$, $d_3'$, $d_4'$ центров циклов, касающихся соответственно $(d_2, d_3, d_4)$; $(d_1, d_3, d_4)$; $(d_1, d_2, d_4)$; $(d_1, d_2, d_3)$, относительно окружностей, сопряженных с треугольниками, образованными этими тройками, сходятся в одной точке. Окружностью, сопряженной с данным треугольником, называют окружность, по отношению которой треугольник является автополярным.

С помощью теоремы Паскаля автор доказывает, что при изменении всевозможными способами направления осей получаемые восемь различных центров пучков поляр лежат на одном и том же коническом сечении.

Пользуясь барицентрическими координатами и комплексной системой референции, автор устанавливает аналитически, что это коническое сечение

будет равнобочной гиперболой, и находит ее центр.
*Б. Н. Саморуков*

5215 К. **Аналитическая геометрия. Изд. 2-е. Смит, Салковер, Джастис** (Analytic geometry , 2-nd ed. Smith E. S., Salkover M., Justice H. K. Approx. 350 pp., John Wiley and Sons, Inc., N. Y., 1954, prob. 4. 50 doll.) Science, 1954, 118, № 3075, 22 (библ.)

5216 **РЕЦ. Математические труды Дезарга.**— (L'oeuvre mathématique de G. Desargues. Presses Universitaires de France, Bibliotèque de Philosophie Contemporaine, Paris, 1951) [Рецензия: **Кулидж** (Coolidge Julian L.), Scripta math., 1953, 19, № 1, 58—60 (англ.)

## ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

5217. **Об одном обобщении прямой и отрезка Эйлера. Палевич** (O jednoj generalizaciji Eulerovog pravca i eulerove dužine. Raljević Šefkija), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, 8, сер. 2, № 1, 47—48 (хорв.; резюме франц.)

Пусть $T$ — центр тяжести системы $n$ точек $M_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), $T_j$ ($j = 1, 2, \ldots, n$) — центр тяжести системы ($n-1$) точек из $n$ точек $M_\nu$ ($\nu \neq j$) и $V$ — произвольная точка пространства.

1. Прямые $p_\nu \parallel VM_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$), проходящие соответственно через точки $T_1, T_2, \ldots, T_n$, пересекаются в одной точке $S$.

2. Точки $S$, $T$, $V$ лежат на одной прямой. Точка $T$ лежит внутри отрезка $SV$ и $ST : TV = 1 : (n-1)$.

3. В случае $n = 3$, если $V$ — ортоцентр треугольника $M_1M_2M_3$, прямая $(STV)$ — прямая Эйлера.
*С. И. Зетель*

5218. **О натяжениях в поверхности, описанной движущейся окружностью, перпендикулярной к линии центров и находящейся в равновесии под действием постоянных внутренних сил давления. Бузин Е. И.,** Докл. АН УзССР, 1954, № 1, 3—8 (русск.; резюме узб.)

Автор выводит уравнение поверхности, указанной в заглавии, и, пользуясь известными уравнениями равновесия гибкой нерастяжимой поверхности, получает формулы, выражающие натяжения. В частности получаются натяжения поверхности тора.
*А. Р. Хволес*

5219. **Некоторые свойства сетного полотна, расположенного в виде части круглого кольца. Андреев Н. Н.,** Тр. Моск. техн. ин-та рыбной пром-сти и х-ва, 1953, № 5, 64—68

Автор, пользуясь дифференциальной геометрией, показывает, что сетное полотно, посаженное на подборы с различными посадочными коэффициентами, может располагаться на плоскости только в виде части кругового кольца. Таким образом, распространенное предположение, что из прямоугольного куска сетного полотна можно получить трапецию, ошибочно.
*С. И. Зетель*

5220. **Векторный анализ перед аналитической геометрией в пространстве. Карст** (Vector analysis before solid analytic geometry. Karst O. J.). Amer. Math. Montly, 1953, 60, № 10, 707—708 (англ.)

5221. **Кривизна сопряженных поверхностей пространственных зацеплениях. Колчин Н. И.,** Тр. семинара по теории машин и механизмов, 1953, 13, № 49, 5—15

На примере задачи о пространственном зацеплении червячной передачи рассматривается определение главных радиусов кривизны зубцов колеса (или червяка), если задано уравнение поверхности зацепления.
*С. П. Фиников*

5222. **Обобщение одной геометрической теоремы Эйлера. Труседелл** (Generalization of a geometrical theorem of Euler. Truesdell G.), Comment. math., helv., 1953, 27, № 3, 233—234 (англ.)

Доказывается следующая теорема. Пусть имеется вектор $n$-мерного пространства $x$; рассмотрим аффинное движение $\overline{x} = (A \cdot t + I)x$, где $A$ — некоторая квадратная матрица $n$-го порядка, $I$ — единичная матрица, $t$ — время. Положим $V$ равным объему $n$-мерного тетраэдра, образованного отрезками $0x_i$ ($i = 1, \ldots, n$). Тогда $\overline{V}/V = \sum_{i=0}^{n} I_i t^i$, где через $I_i$ обозначена $i$-я симметрическая функция собственных чисел матрицы $A$. Даются некоторые следствия этой теоремы. Указывается, что аналогичный результат для $n = 2, 3$ получен Эйлером при выводе уравнения неразрывности в потоке жидкости, однако в общем случае, для деформаций жидкой частицы такое соотношение уже не имеет места, поскольку движение жидкой частицы является аффинным движением только до членов порядка $dt^2$.
*Г. И. Баренблатт*

## ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

5223. **Неевклидова геометрия и аксиоматические определения. Адамар** (A nem-euklideszi geometria és az axiómatikus definiciók. Hadamard J.), Magyar tudomán. akad. Mat. és fiz. osztályának közleményei, 1953, 3, № 2, 199—208 (венг.)

Исторический обзор развития идей неевклидовой геометрии и аксиоматики определений. Доклад прочитан Дьердьем Хайош 16 декабря 1952 г. на заседании сессии Академии наук Венгрии, посвященной Бойаи.

5224. **Цепная линия и трактриса в неевклидовой геометрии. Фултон** (Catenary and tractrix in non-euclidean geometry. Fulton Curtis M.), Math. Mag., 1953, 27, № 2, 79—84 (англ.)

В гиперболической плоскости рассматривается однородная гибкая нерастяжимая нить, находящаяся под действием натяжения и внешней силы, вектор которой параллелен данной прямой в данном ее направлении. Выводится дифференциальное уравнение линии равновесия нити в предельных координатах. Исследуются случаи, когда линия равновесия нити будет параболой или цепной линией. Выводится уравнение трактрисы в предельных координатах (и ее параметрические уравнения) и устанавливается, что эволютой трактрисы является цепная линия.

Уравнения трактрисы в гиперболической плоскости и ее эволюты были получены Н. Г. Беляевым

(Доповіді АН УРСР, 1951, № 5, 312—319). Результаты Беляева и Фултона не совпадают, что объясняется различием в определениях трактрисы: Беляев определяет трактрису как кривую, отрезок касательной к которой между точкой касания и точкой пересечения с фиксированной прямой имеет постоянную длину; Фултон заменяет эту прямую предельной линией. Уравнения трактрисы и ее эволюты в прямоугольных гиперболических координатах, полученные Беляевым, имеют большое внешнее сходство с уравнениями соответствующих линий евклидовой плоскости в прямоугольных декартовых координатах, чего нельзя сказать об уравнениях Фултона.

Статья набрана неряшливо, с пропусками букв в формулах и другими опечатками; в уравнении (8) нужно вычеркнуть букву $K$; равенство (10) не занумеровано. *А. С. Смогоржевский*

**5225. Тернарные соотношения в геометрии и алгебре. Рейнич** (Ternary relations in geometry and algebra. Rainich G. Y.), Michigan Math. J., 1952, 1, № 2; 97—111 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Соотношение эквивалентности двух элементов $a$ и $b$ должно удовлетворять условиям симметричности и транзитивности, которые, если «$a$ эквивалентно $b$» записывать в виде $(ab)'$, формулируются следующим образом: $(ab)' > (ba)'$ (символ $>$ означает «влечет») и $(ab)'$ и $(bc)' > (ac)'$. В работе отмечается роль, которую играют в разных вопросах геометрии и алгебры тернарные соотношения, удовлетворяющие условиям аналогичного типа. Так, например, если условиться обозначать принадлежность трех точек $A$, $B$ и $C$ одной прямой символом $(ABC)$*, то имеют место следующие очевидные соотношения, которые можно назвать соотношениями симметричности и транзитивности $(ABC)^* > (BCA)^*$, $(BAC)^*$ и т. д. и $(ABC)^*$ и $(ABD)^* > (ACD)^*$. Автор записывает также основные для проективной геометрии предложения Паппа, Дезарга и теорему о полном четырехстороннике в виде, близком по форме к «условию транзитивности» тернарного соотношения $(ABC)^*$, и указывает, как следует формулировать аксиомы проективной геометрии в терминах соотношения $(ABC)^*$, не используя понятия прямой. В качестве основного примера аналогичного тернарного соотношения в алгебре в работе рассматривается симметричное соотношение $a + b + c = 0$, введение которого равносильно определению операции сложения в произвольной коммутативной группе. В конце работы содержатся общие соображения о роли подобных соотношений в математике, в том числе соотношений, связывающих более трех элементов. Новых результатов работа не содержит. *И. М. Яглом*

**5226. К топологии конфигурации Дезарга. I. Лауффер** (Zur Topologie der Konfiguration von Desargues. I. Lauffer Rudolf), Math. Nachr., 1953, 9 № 4, 235—240 (нем.)

Для общей конфигурации Дезарга имеется шесть топологически различных видов, которые получаются из рассмотрения разложения (с помощью конфигурации) проективной плоскости на четырехугольники и треугольники (Levi F., Geometrische Konfigurationen, Leipzig, 1929, гл. IV, § 7), при этом существенную роль играют наглядность образа и пространственные соображения. Автор указывает на незамеченную ранее возможность для 10 точек конфигурации Дезарга установить топологические характеристики, которые и приводят к шести типам конфигураций; для исключения интуиции и излишнего охватывающего пространства $R_3$ он пользуется аналитическим методом на плоскости.

Обозначим через $(Ax)$, $(Bx)$, $(Xc)$, $(Xd)$ линейные формы, определяющие соответственно точки $A$, $B$ и прямые $c$, $d$, и под знаком sgn смешанного вурфа двух точек $A$, $B$ и двух прямых $c$, $d$ (без инциденций) будем понимать $\operatorname{sgn}(ABcd) = \operatorname{sgn}(Ac)(Ad)(Bc)(Bd)$. Пусть $A$, $B$, $C$ — вершины треугольника, $a$, $b$, $c$ — его стороны, $P$ — какая-нибудь точка и $g$ — какая-нибудь прямая, тогда три знака $\operatorname{sgn}(PAga)$, $\operatorname{sgn}(PBgb)$, $\operatorname{sgn}(PCgc)$, если не обращать внимания на порядок вершин, могут представлять только одну из трех комбинаций (+++), (++−), (+−−). Условимся символу $K(Pg, ABC)$ придавать то или другое из значений $i$, $v$, $d$ соответственно той или иной комбинации знаков в указанной тройке. Пусть $Z$ будет центр двух перспективных треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, тогда линейные формы этих точек можно выбрать так, что $(Zx) = (A_1x) + (A_2x)$, (ц. п.); знак (ц. п.) означает в написанном равенстве или утверждении возможность циклической перестановки вершин (или сторон) треугольников. При указанном условии легко определяются линейные формы всех остальных точек и прямых конфигурации. Полагая $(A_1B_1C_1) = 1$, примем с другой стороны

$$(Zx) = a(A_1x) + b(B_1x) + c(C_1x),$$

в таком случае можно определить знаки разных смешанных вурфов по знакам некоторых выражений из коэффициентов $a$, $b$, $c$. Для $P = A_1$ автор берет $g = a_1 = B_2C_2$ и определяет символ $K$ этой точки относительно треугольника $ZB_1C_1$, (ц. п.). Для точки $P = A_2$, $g = a_2 = B_1C_1$ и $K$ определяется по треугольнику $ZB_2C_2$, (п. п.); наконец, для $P = A_3$, $g = a_3 = A_1A_2$ и $K$ определяется по треугольнику $B_1B_2C_3$, (ц. п.).

Автор доказывает, что во всякой общей конфигурации Дезарга существует по крайней мере одна точка с характеристикой $K = i$; наглядная интерпретация этой теоремы: всякую общую конфигурацию Дезарга можно спроектировать на евклидову плоскость так, что получатся два центрально подобных треугольника, центр подобия которых будет внутри обоих треугольников. Если принять, что точка с характеристикой $K = i$ есть точка Z, то $\operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} b = \operatorname{sgn} c$ и обозначения других точек конфигурации можно выбрать так, что $a \leqslant b \leqslant c$. Определяя указанным выше способом характеристики остальных точек конфигурации, автор получает шесть типов конфигурации соответственно допустимым значениям $a$, $b$, $c$. *С. С. Бюшгенс*

**5227. К топологии конфигурации Дезарга. II. Лауффер** (Zur Topologie der Konfiguration von Desargues. II. Lauffer Rudolf), Math. Nachr., 1953, 10, № 3-4, 179—180 (нем.)

Статья дает некоторые дополнения к предыдущей статье автора (см. реф. 5226), на определения, обозначения и методы которой он ссылается. Для каждой конфигурации Дезарга существует линия 2-го порядка, относительно которой для каждой точки конфигурации соответствующая ось перспек-

тивы будет полярой этой точки. Автор доказывает две теоремы:

1. Если конфигурация Дезарга имеет первый вид (четыре точки с характеристикой $K = i$ и шесть точек с характеристикой $K = d$), то соответствующая линия 2-го порядка мнима.

2. В конфигурациях Дезарга всех видов, кроме этого первого, соответствующая линия 2-го порядка Ф действительна, причем точки с характеристикой $K = v$ лежат вне Ф (действительные касательные), а точки с характеристиками $K = i$ или $K = d$ лежат внутри Ф (имеют пары мнимых сопряженных касательных).

Далее автор, принимая Ф за фундаментальный образ неевклидова мероопределения, рассматривает частности в расположении элементов конфигурации и распределение характеристик ее точек.

*С. С. Бюшгенс*

5228. **Еще о точках пересечения неначерченной прямой с окружностью. Микула** (Ještě jednou průsečíky nenakreslené přímky s kružnicí. Mikula Jan), Math.-přírodověd. rozhl., 1953, 32, № 4, 124—128 (чеш.)

В статье Вечерки (РЖМат, 1953, 1343) решена задача на построение точки пересечения неначерченной прямой, заданной двумя своими точками, с окружностью при помощи только одного циркуля в том случае, когда прямая не проходит через центр окружности. Здесь эта задача решается для случая, когда неначерченная прямая проходит через центр окружности. *Б. А. Ровенфельд*

5229. **О перспективе сферы. Джованарди** (Sulla prospettiva di una sfera. Giovanardi Mario), Ricerca, Napoli, 1953, 4, № 1-2, 40—51 (итал.)

Перевод из Math. Rev., 1954, 15, № 1, 56.

5230 К. **Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского. Делоне Б. Н.**, 128 стр., Изд-во АН СССР, М., 1953, 4 р. 65 к.

Книга выходит за рамки своего заглавия и представляет собой довольно содержательное изложение планиметрии Лобачевского, рассчитанное на мало подготовленного читателя; особое внимание уделено принципиальным моментам, отличающим геометрию Лобачевского от геометрии Евклида. Доказательство непротиворечивости планиметрии Лобачевского заключается в построении модели Бельтрами — Клейна; это построение проведено оригинально, с существенным использованием связи между проективными преобразованиями плоскости, переводящими в себя некоторый круг, и аффинными преобразованиями трехмерного пространства, переводящими в себя определенный конус вращения.

После тщательно написанного изложения аксиоматики Ф. Шура для евклидовой плоскости и для плоскости Лобачевского строится модель Клейна геометрии Лобачевского.

Затем идет изложение теории измерения углов, длин и площадей в плоскости Лобачевского. Последние главы книги посвящены классификации движений плоскости Лобачевского, кривым постоянной кривизны и модели Пуанкаре геометрии Лобачевского. Книга заканчивается двумя краткими приложениями: о псевдосфере Бельтрами и о связи неевклидовой геометрии Лобачевского с теорией относительности. *И. М. Яглом*

5231 К. **Начертательная геометрия. Занден** (Darstellende Geometrie. Sanden H., 4-te Aufl., 107 S., B. G. Teubner, Lpz., 1935) (нем.)

Небольшая по объему книга предназначена для студентов технических учебных заведений. Настоящее, четвертое, издание немного отличается от первого издания, вышедшего в 1931 г. Изложение элементарное. Содержание видно из следующего перечня глав: Изображение точек, прямых и плоскостей в прямоугольной параллельной проекции; Эллипс; Конические сечения; Тела вращения, Винтовые линии и винтовые поверхности; Аксонометрия; Очерк центральной перспективы. *М. К. Керимов*

5232 РЕЦ. **Начертательная геометрия. Ниче** (Diskriptivna geometrija, Niče Vilko, 367 s., Školska Knjiga, Zagreb, 1952, 617 sl.), [Рецензия: **Юстинияновић** (Justinijanović Juraj), Glasnik mat-fiz. i. astron., 1953, 8, сер. 2, № 1, 64—65 (хорв.)]

5233 РЕЦ. **Геометрия и проблема пространства. V. Неевклидовы геометрии. Гонзет** (La géométrie et le problème de l'espace. V. Les géométries non euclidiennes. Gonseth Ferdinand (Bibliothèque scientifique), 112 pp., Dunod, P., 1953, 690 Ffr). [Рецензия: **Де-Толленаре** (De Tollenaere), Rev. questions scient., 1953, 14, oct., 596—597 (франц.)]

5234 РЕЦ. **Начертательная геометрия** (Darstellende Geometrie. 1 Lehrbrief DIN A 5. 60 S., Ill.; 2 Lehrbrief DIN A 5. 120 S., Ill.; 3 Lehrbrief DIN A5. 180 S., Ill., 4. Lehrbrief DIN A5. 242 S, Ill., Verlag Technik, B., 1952, Preis je Lehrbrief 2 DM) [Рецензия: **Шуберт** (Schubert), Technik, 1953, 8, № 9, 630 (нем.)]

## АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

5235. **Сообщение о работах Бюрниа. Годо** (Rapport sur les travaux de M. Burniat. Godeaux Lucien), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1953, 39, № 11, 920—921 (франц.)

Краткий обзор работ Бюрниа в области алгебраической геометрии.

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

5236. **О соприкасающихся квадриках поверхности. Аргириаде** (Asupra cuadricelor osculatoare la o suprafață. Arghiriade Em.), Comun Acad. R. P. Române. 1953, 3, № 1—2, 19—23 (рум.; резюме русск., франц.)

Рассматриваются квадрики, имеющие с поверхностью касание 2-го порядка. Совокупность $\infty^3$ таких квадрик можно, как известно, разложить на $\infty^2$ пучков квадрик, каждый из которых устанавливает единый для всех квадрик пучка поляритет между, связкой прямых $d$, проходящих через точку поверхности, и совокупностью прямых касательной плоскости; каждый пучок пересекает поверхность по

кривой, имеющей в данной точке три касательные (терна).

1. Рассматриваются три пучка квадрик, у каждого из которых терна вырождается в одну прямую. Известно, что точечно-плоскостное соответствие Сегре устанавливает связь между пучком плоскостей с осью на прямой $d$ и кривой третьего порядка, лежащей в касательной плоскости (кривая Сегре).

Показывается, что кривая 3-го порядка, гессиан которой (кривая, уравнение которой получается от приравнивания нулю гессиана левой части уравнения данной кривой) совпадает с кривой Сегре, которая соответствует прямой $d$, имеет касательными в своих точках перегиба три прямые, соответствующие прямой $d$ в поляритете относительно трех пучков квадрик с вырождающимися тернами.

2. Две формы

$$\Phi = Ax_2^3 + 3Bx_2^2x_3 + 3Cx_2x_3^2 + Dx_3^3$$

$$\Phi'' = Ax_2^3 - Bx_2^2x_3 - Cx_2x_3^2 + Dx_3^3$$

называются формами, находящимися в отношении О. Майера. Если $A = \beta$, $D = \gamma$ ($\beta$, $\gamma$ — коэффициенты кубичной формы Фубини), то эти формы являются левыми частями уравнений некоторых терн, каждой из которых соответствует пучок соприкасающихся квадрик. Соответствие между прямыми, отвечающими прямой $d$ в поляритете относительно этих пучков, есть гомология, переводящая кривую Сегре, которая соответствует прямой $d$, в ее гессиан. Наоборот, если некоторая гомология переводит кривую Сегре прямой $d$ в ее гессиан, а $d_1'$ и $d_2'$ — соответствующие в этой гомологии прямые (отвечающие прямой $d$ в поляритете относительно двух пучков соприкасающихся квадрик), то терны, соответствующие этим пучкам, будут находиться в отношении Майера. Если паре прямых $d_1$ и $d_2$ в поляритете относительно некоторого соприкасающегося пучка квадрик соответствуют прямые, находящиеся в гомологии, то эта гомология переводит кривую Сегре, которая соответствует прямой $d$, в ее гессиан. *Н. И. Кованцов*

5237. **К проективно-дифференциальной геометрии поверхностей комплекса. II. Построение и безинтегральное представление специальных сдвигов.** Барнер (Zur projektiven Differentialgeometrie der Komplexflächen. II. Konstruktion und integrallose Darstellung spezieller Schiebungen. Barner Martin), Math. Ann., 1953, 126, № 5, 418—446 (нем.)

Статья является продолжением работы автора (РЖМат, 1954, 3065). Рассматриваются специальные виды сдвигов трехмерного проективного пространства $R_3$. Каждый сдвиг индуцирует в пятимерном линейчатом пространстве $R_5$ гиперболическое движение такого рода, при котором некоторая гиперплоскость $E$ катится без скольжения по некоторой однопараметрической совокупности гиперплоскостей. Если в таком движении остается неподвижной некоторая точка $a$, то сдвиг носит название $K_4$-сдвига; если точечно неподвижной оказывается некоторая прямая $g$, то получают $K_3$-сдвиг, если же точечно неподвижной является некоторая двухмерная плоскость, имеют $K_2$-сдвиг.

1. $K_4$-сдвиги. Различают 3 типа $K_4$-сдвигов в зависимости от того, пересекает ли прямая $(a, \omega)$ ($\omega$ — точка, полярно сопряженная с $E$ относительно гиперквадрики $Q$) гиперквадрику $Q$ в двух действительных, мнимых или совпавших точках. Этим точкам соответствует в $R_3$ пара прямых $\pi$. Отмечается, например, что прямые, пересекающие $\pi$, при сдвиге описывают линейчатые поверхности, образующие которых принадлежат комплексу $a$ (так называется комплекс, образующийся от пересечения гиперквадрики с гиперплоскостью, полярно сопряженной точке $a$). Возможность безинтегрального представления $K_4$-сдвига определяется следующей теоремой: если дан постоянный (fester) линейный комплекс, то для любых двух кривых, которые являются асимптотическими линиями образованной ими линейчатой поверхности, существует точно один $K_4$-сдвиг такого рода, что данные кривые являются траекториями, а данный линейный комплекс — постоянным комплексом $K_4$-сдвига. Отмечаются свойства $K_4$-поверхностей, т. е. поверхностей комплекса, образующихся при $K_4$-сдвиге. Например, если взять на $K_4$-поверхности две асимптотические второго семейства (траектории сдвига), то две линейчатые поверхности, из которых одна образована прямыми, соединяющими соответствующие точки асимптотических, а вторая — линиями пересечения касательных плоскостей к $K_4$-поверхности в этих точках, образуют специальную расслояемую пару. При этом расслояющие кривые являются или кривыми одного и того же комплекса, если обе рассматриваемые асимптотические обладают тем же свойством, или в общем случае могут быть так однозначно отображены друг на друга, что расслояющие кривые, принадлежащие одной и той же линейчатой поверхности комплекса, определяют тот же комплекс. $K_4$-поверхность однозначно определяется, если задать некоторую кривую комплекса, асимптотическую линию второго семейства и постоянный комплекс сдвига, причем касательные к отмеченной кривой комплекса вдоль указанной асимптотической не принадлежат постоянному комплексу.

2. $K_3$-сдвиги. Различают 6 типов $K_3$-сдвигов в зависимости от взаимного расположения абсолютной гиперквадрики и двухмерной плоскости, проходящей через прямую $g$ и точку $\omega$. Каждая точка прямой $g$ соответствует постоянному линейному комплексу через поляритет относительно абсолютной гиперквадрики, а все такие комплексы составляют пучок комплексов. Отмечается, в частности, что каждая прямая подвижного комплекса $\omega$ описывает при $K_3$-сдвиге линейчатую поверхность комплекса, причем комплекс, которому принадлежит эта поверхность, входит в состав указанного пучка комплексов. Если задать произвольную кривую и пучок линейных комплексов, среди которых нет такого, к которому принадлежала бы данная кривая, то существует только один $K_3$-сдвиг, для которого заданная кривая является траекторией, а данный пучок комплексов — постоянным пучком сдвига.

Отмечаются свойства $K_3$-поверхностей. В частности, то, что $K_3$-поверхности есть те поверхности комплекса, у которых касательные к кривым комплекса вдоль каждой асимптотической второго семейства образуют линейчатую поверхность комплекса. Существует 6 различных типов $K_3$-поверхностей. Указывается способ однозначного задания $K_3$-поверхности и ее безинтегральное представление.

3. $K_2$-сдвиги. Неподвижная двухмерная плоскость $q$ $K_2$-сдвига и точка $\omega$ определяют в $R_5$ трехмерную плоскость, которой в $R_3$ соответствует некоторая линейная конгруенция. Каждая прямая, принадлежащая комплексу $\omega$, при $K_2$-сдвиге образует линейчатую поверхность этой конгруенции.

Плоскость $q$ пересекает $Q$ по кривой, образом которой в $R_3$ может быть или квадрика, или пара скрещивающихся пучков, или пара совпадающих пучков прямых, но из этого следует, что $K_2$-сдвиг определяет в проективном пространстве эллиптическую, квазиэллиптическую или изотропную геометрию, в которой $K_2$-сдвиг является клиффордовым сдвигом. Отмечается, что всякая $K_2$-поверхность есть поверхность, у которой оба семейства асимптотических линий принадлежат линейным комплексам, и наоборот. *Н. И. Кованцов*

## ГЕОМЕТРИЯ $n$-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

**5238. К основам дифференциальной геометрии гиперповерхности центроаффинного пространства.** Пясецкий С. А., Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1953, 71, № 1, 127—153

Как известно, внутренняя геометрия гиперповерхности, нормализованной с помощью радиуса вектора своей точки и несобственной плоскости своей касательной гиперплоскости, есть эквиаффинная, проективно-евклидова геометрия аффиной связности общего вида (Норден А., Пространства аффинной связности, Гостехиздат, М., 1950, § 70). Используя эту связность, автор приводит некоторые формулы, определяющие вектор аффинной нормали гиперповерхности центроаффинного пространства. Кроме того, он находит такое направление, которое центроаффинно-инвариантно связано с гиперповерхностью в каждой ее точке, не лежит в ее касательной гиперплоскости и определяется через производные третьего порядка радиуса-вектора. Оно совпадает с направлением аффинной нормали только для двухмерной поверхности трехмерного пространства.

В работе устанавливается инвариантный признак аффинной гиперсферы, центр которой не совпадает с центром пространства. Приводится также выражение тензора Дарбу и его обращение в нуль как признак гиперквадрики; последние результаты могут быть получены простой специализацией общих соотношений теории нормализованных поверхностей (Норден А., цит. соч., § 67, 80).
*А. П. Норден*

**5239. Многообразия частного вида, вложенные в центроаффинное пространство.** Атанасян Л. С., Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1953, 71, № 1, 3—17

В центроаффинном пространстве $E_m$ уравнением $\vec{r} = \vec{r}(x^i)$ $i = 1, \ldots, n$ задается $n$-мерная поверхность $V_n$, на которой введено центральное оснащение. Репер составляется из касательных векторов $\vec{r}_i = \partial\vec{r} \,/\, \partial x^i$ и оснащающих векторов $\underset{\lambda}{\vec{\xi}}$ $\lambda = 1,2,\ldots, m-n$.

Дифференцирование касательных векторов дает

$$\vec{r}_{ik} = \Gamma^h_{ik}\vec{r}_h + h^\lambda_{ik}\underset{\lambda}{\vec{\xi}}.$$

В работе рассматриваются вырожденные поверхности $V_n$, в каждой точке которых все тензоры $h^\lambda_{ik}$ вмещены в некоторую $r$-мерную плоскость $\Pi_r$, $r < n$ (т. е. при любом векторе $\vec{z}^k$ все векторы $h^\lambda_{ik}\vec{z}^k$ лежат в $\Pi_r$). Такие поверхности оказываются $(n+1)$-вырожденными многообразиями ранга $r$. Они состоят из $\infty^r$ «образующих» $V_{n-r}$, каждая из которых вмещена в некоторую плоскость $E_{n-r+1}$, проходящую через центр пространства $E_m$. При этом касательные плоскости к $V_n$ вдоль $V_{n-r}$ вмещены в некоторое $E_{n+1} \supset E_{n-r+1}$.

Показано, что каждая линия, являющаяся в $V_{n-r}$ геодезической относительно связности, которая инвариантным образом индуцируется на $V_{n-r}$ при помощи радиусов-векторов, оказывается и в $V_n$ геодезической относительно связности, индуцированной данным оснащением.

Перечисленные построения выполнены также и для случая, когда центр пространства бесконечно удален.

Вопросами существования рассматриваемых в работе поверхностей автор не занимается.
*Г. Ф. Лаптев*

**5240. Некоторые специальные многообразия многомерного афинного пространства.** Атанасян Л. С. Уч. зап. Моск. гос. пед. ин-та, 1953, 71, № 1, 19—44

Число измерений соприкасающейся плоскости $E_{n+p}$ невырожденной $n$-мерной поверхности $V_n$, погруженной в $m$-мерное аффинное пространство $E_m$, равно меньшему из чисел $m$ и $n(n+3)/2$. В работе рассматриваются вырожденные $V_n$, для которых $p$ меньше меньшего из чисел $m-n$ и $n$.

Предполагается, что в $E_{n+p}$ есть «особая плоскость» $\omega_{n+s}$, $0 \leqslant s < p$, обладающая тем свойством, что все частные производные любого ее вектора лежат в $E_{n+p}$. $V_n$ задается уравнением $\vec{r} = \vec{r}(x^i)$, $i = 1, \ldots, n$. Репер состоит из $n$ векторов $\vec{r}_i = \partial\vec{r} \,/\, \partial x^i$, $s$ векторов $\underset{E}{\vec{\xi}} \subset \omega_{n+s}$, $p-s$ векторов $\underset{A}{\xi} \subset E_{n+p}$ и $m-n-p$ векторов $\underset{\rho}{\xi}$. Дифференцирование дает

$$\vec{r}_{ij} = \Gamma^h_{ij}\vec{r}_h + h^A_{ij}\underset{A}{\vec{\xi}} + h^E_{ij}\underset{E}{\vec{\xi}}$$

$$\underset{A}{\vec{\xi}}_i = \beta^h_i\vec{r}_h + \gamma^E_i\underset{E}{\vec{\xi}} + \overset{\rho}{\gamma}_i\underset{\rho}{\vec{\xi}}.$$

Предполагается, что система тензоров $h^A_{ii}$ и векторов $\overset{\rho}{\underset{A}{\gamma}}_i$ обладает следующими свойствами:

а) $h^A_{i[j}\overset{\rho}{\underset{A}{\gamma}}_{k]}=0$; б) $h^A_{ij}$ линейно независимы; в) из $\overset{A}{\psi}\overset{\rho}{\underset{A}{\gamma}}_i=0$ следует $\overset{A}{\psi}=0$; г) число измерений $r$ общей области для $h^A_{ij}$ и $\overset{\rho}{\underset{A}{\gamma}}_i$ не превосходит $p-s$.

При этих условиях показано, что в случае $s=0$ $V_n$ оказывается развертывающимся многообразием ранга $r$ (состоит из $\infty^r$ плоских образующих $E_{n-r}$, вдоль каждой из которых касательная плоскость к $V_n$ постоянна). В случае $s>0$ $V_n$ состоит из $\infty^r$ «образующих» $V_{n-r}$, вдоль каждой из которых касательная плоскость к $V_n$ параллельна некоторой $E_{n+s}$, а $E_{n+p}$ постоянна. Более подробно разобраны случаи $p=1$ и 2.

Вопросы существования перечисленных типов поверхностей автор не рассматривает. *Г. Ф. Лаптев*

**5241. Об одной системе псевдо-тензоров на двумерных поверхностях аффинных пространств. Измайлов В. Д.,** Докл. АН СССР, 1954, 94, № 1, 9—12

В работе обобщаются на случай $X_2\subset E_n$ некоторые из афинно-инвариантных построений, ранее выполненных автором для $X_2\subset E_6$ (Измайлов В. Д., Докл. АН СССР, 1952, 85, № 3, 477—480).

Для невырожденной поверхности $r=r(x^1,x^2)$ система определителей $n$-го порядка

$$\lambda a^1_m\ldots a^1_1,\ldots a^N_m\ldots a^N_1\equiv(r_1,r_2;r_{11},r_{12},r_{22};\ldots;r_{1\ldots1};\ldots r_{2\ldots2};r_{a^1_m\ldots a^1_1},r_{a^N_m\ldots a^N_2}),$$

где $m$ — наибольшее из натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству $N\equiv n-(m-1)(m-2)/2>0$, представляет собою тензорную плотность веса $\rho=m(m^2-1)/6$. Из нее разными для различных случаев способами строится невырожденный симметрический тензор $g_{ij}$.

На $X_2\subset E_4$ уравнение $g_{ij}\,dx^i dx^j=0$ определяет единственную сопряженную сеть. В других случаях геометрический смысл $g_{ij}$ не выяснен.

*Г. Ф. Лаптев*

**5242. Об одном преобразовании пары наложимых поверхностей. Рыжков В. В.,** Докл. АН СССР, 1954, 95, № 1, 25—27

Рассматривается преобразование («квазиподобное») пары метрически наложимых $n$-мерных поверхностей евклидова пространства $R_N$, сохраняющее порядок метрической наложимости этих поверхностей, а также связанное с ним преобразование, переводящее пары наложимых поверхностей из $R_N$ в пары поверхностей из $R_{N+1}$, допускающих наложение уже не в общей группе движений, а в группе вращений с фиксированным центром.

В $R_N$ заданы два положения ортогонального репера: $T'$ и $T''$; автор связывает с ними два совмещенные пространства $R'_N$ и $R''_N$; точечное соответствие между ними устанавливается движением первого или второго рода, переводящим $R'_N$ в $R''_N$ вида $\mathbf{x}\to\mathbf{y}=\mathbf{Ax}+\mathbf{b}$, где $\mathbf{A}$ — ортогональная матрица (первого или второго рода), причем $\mathbf{x}=\overrightarrow{OM'}$, $\mathbf{y}=\overrightarrow{OM''}$, где $O$ — фиксированная точка $R_N$, а $M'$ и $M''$ — соответственные точки $R'_N$ и $R''_N$.

Сопоставив паре точек $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ пару точек $\vec{\xi}$, $\vec{\eta}$, автор получает следующий результат.

Единственное преобразование вида $\vec{\xi}=k\mathbf{x}$, $\vec{\eta}=k\mathbf{y}$, сохраняющее изометрию преобразуемой пары пространств (также каких-либо равных геометрических образов), есть, кроме подобного, квазиподобное преобразование при $k=c/(x^2-y^2)$, $c=\text{const}$.

Квазиподобное преобразование обладает свойством взаимности и для каждого пространства в отдельности представляет гомологию. Квазиподобное преобразование переводит пару поверхностей, наложимых до порядка $m$, в пару поверхностей, наложимых до того же порядка. При этом общие сопряженные направления переходят в сопряженные на квазиподобной паре поверхностей Преобразование Лапласа относительно этой общей сопряженной сети при квазиподобном преобразовании переходит в преобразование Лапласа.

Обозначив через $\hat{\mathbf{a}}=\{\mathbf{a},a_{n+1}\}$ вектор в $R_{N+1}$, имеем теорему:

Если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ наложимы в $R_N$ до порядка $m$, то поверхности

$$\vec{\xi}=\{\lambda\mathbf{x},c\lambda/2-\lambda(\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2)/2c\},$$

$$\vec{\eta}=\{\lambda\mathbf{y},c\lambda/2+\lambda(\mathbf{x}^2-\mathbf{y}^2)/2c\}$$

при любой функции $\lambda=\lambda(u_i)$ допускают наложение того же порядка в группе вращений $R_{N+1}$ с центром $(\mathbf{O},O)$.

Таким образом получаются все пары поверхностей из $R_{N+1}$, наложимые в группе вращений с заданным центром; возможно и обратное преобразование.

Отсюда следует, что задача о налагающихся парах поверхностей с соответствующей на них конической системой сводится к задаче о парах поверхностей переноса, налагающихся в группе вращений. *С. Д. Россинский*

**5243. Изометрическое отображение комплексных многообразий. Калаби** (Isometric imbedding of complex manifolds. Calabi Eugenio), Ann. Math., 1953, 58, № 1, 1—23 (англ.)

В $k$-мерном комплексном аналитическом пространстве $\mathbf{M}^k$ задана келерова метрика

$$ds^2=g_{\alpha\beta^*}(z,\bar{z})\,dz^\alpha d\bar{z}^{\beta^*},\quad \alpha,\beta^*=1,2,\ldots,k, \qquad (1)$$

где $z^\alpha$ — комплексные координаты точки $\mathbf{p}\in\mathbf{M}^k$, а $\bar{z}^{\beta^*}$ — величины им сопряженные, это значит, что (1) — положительно определенная эрмитова форма и в окрестности каждой точки найдется такая функция $\Phi(z,\bar{z})$ от двух серий переменных $z$ и $\bar{z}$, что $g_{\alpha\beta^*}=\partial^2\Phi/\partial z^\alpha\partial\bar{z}^{\beta^*}$.

Для пары точек $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ вводится инвариантно связанная с келеровой метрикой так называемая

диастатическая функция (греч. διάστασις — расстояние)

$$D(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \Phi(z(\mathbf{p}),\overline{z}(\mathbf{p})) + \Phi(z(\mathbf{q}),\overline{z}(\mathbf{q})) - \Phi(z(\mathbf{p}),\overline{z}(\mathbf{q})) - \Phi(z(\mathbf{q}),\overline{z}(\mathbf{p})),$$

откуда при постоянной $\mathbf{q}$ $\partial^2 D(\mathbf{p},\mathbf{q}) / \partial z^\alpha(\mathbf{p})\,\partial \overline{z}^{\beta}(\mathbf{p}) = g_{\alpha,\beta^*}(z(\mathbf{p}),\overline{z}(\mathbf{p}))$ также для $\mathbf{p}$. Если отображение переводит функцию $D$ для одного пространства в функцию $D$ для другого, то отображение сохраняет метрику (1).

Для гильбертова неопределенного пространства $\mathbf{E}$, т. е, бесконечного комплексного пространства точек с координатами $x^1, x^{-1}, x^2, x^{-2}, \ldots, x^\sigma, \ldots$ с неопределенной эрмитовой формой $ds^2 = \sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma)\,|dx^\sigma|^2$, диастатическая функция равна

$$D(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_\sigma (\operatorname{sgn}\sigma)\,|x^\sigma(\mathbf{q}) - x^\sigma(\mathbf{p})|^2.$$

Для аналитической келеровой метрики (1) указываются функции, которые переводят диастатическую функцию $\mathbf{M}^k$ в диастатическую функцию $\mathbf{E}$, а потому осуществляют локальное изометрическое отображение $\mathbf{M}^k$ в $\mathbf{E}$.

Для унитарного пространства $\mathbf{C}^N$, т. е. комплексного пространства с метрикой $ds^2 = \sum_{\sigma=1}^{N} |dx^\sigma|^2$ ($N \leqslant \infty$) диастатическая функция равна расстоянию между точками $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ $D(\mathbf{p},\mathbf{q}) = \sum_{\sigma=1}^{N} |x^\sigma(\mathbf{q}) - x^\sigma(\mathbf{p})|^2$,

а потому, если $\mathbf{M}^k$ можно локально изометрически отобразить в $\mathbf{C}^N$, то размерность его $N$ является инвариантом келеровой метрики (A). Более того, так как между образами двух различных отображений в $\mathbf{C}^N$ сохраняется расстояние, то это изометрическое отображение в $\mathbf{C}^N$ определяется вплоть до движения (B).

Если метрика — аналитическая и коэффициенты разложения $D(\mathbf{p}_0,\mathbf{p})$ в степенной ряд по $z(\mathbf{p}), \overline{z}(\mathbf{p})$ в точке $\mathbf{p}_0$

$$D(\mathbf{p}_0,\mathbf{p}) = B_{JK}(z)^{m_J}\,(\overline{z})^{m_K},$$

где $(z)^{m_J}$ — некоторое произведение степеней $z^\alpha$, образуют положительную полуопределенную эрмитову матрицу ранга $N$, то в силу свойств эрмитовой матрицы найдется для каждого $\sigma = 1,2,\ldots,N$ такой бесконечный вектор $b_J^\sigma$, что $B_{JK} = \sum_{\sigma=1}^{N} b_J^\sigma b_K^\sigma$.

Ряд $x^\sigma \sum_{J=1}^{\infty} b_J^\sigma (z)^{m_J}$ сходится и определяет изометрическое отображение в $\mathbf{C}^N$. Обратно, если $\mathbf{M}^k$ изометрически отображается в $\mathbf{C}^N$, то $B_{JK}$ обладают указанным свойством. Келерово многообразие с таким свойством $B_{JK}$ в точке $\mathbf{p}_0$ называется разрешимым ранга $N$ в этой точке.

Множество $\boldsymbol{P}$ точек, в которых $\mathbf{M}^k$ разрешимо ранга $N$ очевидно открыто. С другой стороны, так как метрика аналитическая, то некоторую окрестность $\mathbf{U}$ предельной точки $\mathbf{p}$ этого множества можно отобразить в пространство $\mathbf{E}$, которое проектируется в унитарное. В окрестности $\mathbf{U}$ найдется точка $\mathbf{p}'$ из $\mathbf{P}$ и ее окрестность $\mathbf{U}'$, которая в силу предыдущей теоремы изометрически отображается в $\mathbf{C}^N$. Следовательно, по теореме (A) $\mathbf{U}$ отображается в $\mathbf{C}^N$ и множество $\mathbf{P}$ — замкнутое. Тогда, если $\mathbf{M}^k$ — односвязное топологическое пространство, $\mathbf{P}$ совпадает с $\mathbf{M}^k$, подходящую окрестность любой точки $\mathbf{M}^k$ можно отобразить в $\mathbf{C}^N$.

Для того чтобы доказать, что $\mathbf{M}^k$ можно отобразить в $\mathbf{C}^N$ целиком, нужно показать, что отображение одной окрестности можно распространить на все. Если $\mathbf{p}_0$ — точка $\mathbf{M}^k$, то для произвольной точки $\mathbf{p}$ из $\mathbf{M}^k$ можно найти простой путь, лежащий в $\mathbf{M}^k$. Его можно покрыть конечным числом интервалов $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_n$, каждый из которых отображается в $\mathbf{C}^N$. На пересечении каждого $\pi_{\nu-1}$ с $\pi_\nu$ существует в силу теоремы (B) единственное движение, переводящее отображение на $\pi_{\nu-1}$ в отображение на $\pi_\nu$. Так как изометрическое отображение в унитарное пространство определяется вплоть до движения, то таким образом по индукции отображающие функции на $\pi_0$ можно распространить на весь путь. С другой стороны, так как $\mathbf{M}^k$ односвязное, то по теореме о монодромии это отображение не зависит от пути. Таким образом, если односвязное келерово пространство разрешимо ранга $N$ в одной своей точке $\mathbf{p}_0$, то его целиком можно изометрически отобразить в $\mathbf{C}^N$.

При помощи этих результатов выводятся аналогичные условия для отображения в эрмитовы многообразия Фубини — Штуди. *М. В. Васильева*

5244. **Теорема о гармонических пространствах.** Р е н о д и (Un théorème sur les espaces harmoniques. R e n a u d i e J o s e t t e), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 2, 199—201 (франц.)

Рассматривается риманово многообразие $V_n$ класса $C^\infty$ с положительно определенной метрикой. Автор называет $V_n$ гармоническим в точке $m_0$, если существует такая функция $f(r^2/2)$, что выполняется равенство $\Delta_2(r^2/2) = f(r^2/2)$, где $r$ — геодезическое расстояние от точки $m_0$ до текущей точки $m$ многообразия $V_n$.

$V_n$ называется вполне гармоническим, если оно является гармоническим в каждой своей точке.

Основной результат: если $V_n$ таково, что для всех точек $m_0$, принадлежащих $V_n$, группа локальных изометричных преобразований, оставляющих точку $m_0$ инвариантной, транзитивна относительно всех направлений, исходящих из $m_0$, то $V_n$ вполне гармоническое.

Теорема следует из вспомогательного предложения, которое является необходимым и достаточным условием гармоничности $V_n$ в данной точке $m_0$.

Для всех систем геодезических координат с центром в точке $m_0$ значение дискриминанта основной

квадратичной формы зависит только от $r$. Доказательство этого условия сводится к соответствующим вычислениям в геодезической системе координат с центром в $m_0$. *В. И. Ведерников*

**5245. Эргодичность геодезических потоков на некоторых трехмерных многообразиях переменной отрицательной кривизны. Парасюк** (Ергодичність геодезичних потоків на деяких тримірних многообразіях змінної від'ємної кривизни. Парасюк О. С.), Доповіді АН УРСР, 1953, № 6, 387—388 (укр.; резюме русс.)

Рассматривается класс трехмерных римановых пространств переменной отрицательной кривизны и показывается, что при определенных условиях геодезический поток в пространствах этого класса является эргодическим. *Б. А. Ровенфельд*

**5246. Связь между двумя едиными теориями поля Эйнштейна. Главатый** (Connections between Einstein's two unified theories of relativity. Hlavatý Václav), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1953, **39**, № 6, 507- англ.)

Эйнштейн в своих прежних работах (Ann. Math., 1945, **46**, 578—584;, Revs Mod. Phys., 1948, **20**, 35—39; Ann. Math, 1946, **47**, 731—741) строил единую теорию поля на основе комплексного тензора

$$^*g_{\lambda\mu} = h_{\lambda\mu} + ik_{\lambda\mu},$$

где $h_{\lambda\mu}$ симметричный, а $k_{\lambda\mu}$ кососимметричный вещественные тензоры.

Комплексная связность $^*\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$, эрмитово-симметричная по нижним индексам, подчиняется условиям

$$\partial^*_\omega g_{\lambda\mu} = {}^*\Gamma^\alpha_{\lambda\omega}\,{}^*g_{\alpha\mu} + {}^*\Gamma^\alpha_{\omega\mu}\,{}^*g_{\lambda\alpha}.$$

В более поздней работе (The meaning of relativity, Princ Univ. Press, 1950, Appendix II) Эйнштейн исходит из вещественного тензора

$$g_{\lambda\mu} = h_{\lambda\mu} + k_{\lambda\mu},$$

где $h_{\lambda\mu}$, $k_{\lambda\mu}$ удовлетворяют прежним требованиям, и рассматривает вещественную связность $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$, подчиненную условиям

$$\partial_\omega g_{\lambda\mu} = \Gamma^\alpha_{\lambda\omega}\, g_{\alpha\mu} + \Gamma^\alpha_{\omega\mu} g_{\lambda\alpha}.$$

Автор ставит себе задачу: предполагая $h_{\lambda\mu}$, $k_{\lambda\mu}$ в обоих случаях одинаковыми, найти связь между $^*\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ и $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$. Результат следующий:

$$^*\Gamma^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu} - (i+1)\,S^\nu_{\lambda\mu} +$$

$$+ h^{\alpha\nu} K_{\xi\eta\zeta}\left[2\,k^\beta_{(\mu} T^{\xi\eta\zeta}_{\lambda)\alpha\beta} + iT^{\xi\eta\zeta}_{\lambda\mu\alpha}\right]$$

Здесь $S^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{[\lambda\mu]}$; $h^{\alpha\nu}$ — матрица, обратная $h_{\alpha\nu}$ (матрица $h_{\alpha\nu}$ предполагается неособенной); $K_{\omega\mu\nu} = \nabla_\omega k_{\nu\mu} + \nabla_\mu k_{\omega\nu} + \nabla_\nu k_{\omega\mu}$, где $\nabla_\mu$ означает ковариантное дифференцирование с кристоффелями от $h_{\alpha\beta}$; $T^{\omega\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma}$ определяется из уравнений

$$Z^{\xi\eta\zeta}_{\omega\mu\nu} T^{\omega\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma} = \delta^{[\xi}_{[\alpha}\delta^{\eta]}_{\beta]}\delta^\zeta_\gamma,$$

где $Z^{\omega\mu\nu}_{\alpha\beta\gamma}$ составлены определенным образом из координат тензора $k^\mu = k_{\nu\lambda} h^{\nu\mu}$. *П. К. Рашевский*

**5247 РЕЦ. Геометрия и философия. Введение в основания геометрии для образованных неспециалистов. Хаузер** (Geometrie und Philosophie. Eine Einführung in die Grundlagen der Geometrie für gebildete Laien. 2. Aufl. Hauser G. 172 S., Luzern, 1946, 6 DM) [**Рецензия: Камке** (Kamke), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1953, 56, № 2/3, Abt. 2, 60—61 (нем.)]

**5248. РЕЦ. Тензорное исчисление. Анджелич** (Tenzorski račun. Andelić Tatomir P., VIII + 319 str., Naučna knjiga, Beograd, 1952) [**Рецензия: Блануша** (Blanuša), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1953, 8, № 2, 151—152 (хорв.)]

## МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

**5249. Об алгебре голономии риманова однородного пространства. Номидзу** (Sur l'algèbre d'holonomie d'un espace homogène riemannien. Nomizu Katsumi), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 3, 319—321 (франц.)

Пусть $M = G/H$ — риманово однородное пространство, не являющееся локально евклидовым, $L$ — касательное пространство к $M$ в некоторой точке $a$. Предполагается, что максимальная связная подгруппа $H_0$ в группе всех линейных преобразований пространства $L$, индуцированных движениями из стационарной подгруппы $H$, неприводима. Доказывается, что при таких условиях сокращенная группа голономии $\Gamma$ пространства $M$, т. е. группа линейных преобразований пространства $L$, индуцированных параллельными переносами по гомотопным нулю замкнутым путям с началом и концом в $a$, также неприводима.

Алгебра Ли, соответствующая группе голономии $\Gamma$, называется алгеброй голономии пространства $M = G/H$. Дается простое описание алгебры голономии пространства $G/H$ в случае, когда $G$ связно, а $H$ компактно, через функцию, задающую инвариантную аффинную связность. *Е. Б. Дынкин*

**5250. О группах голономии несимметрических римановых многообразий. Бержe** (Sur les groupes d'holonomie des variétés riemanniennes non symétriques. Berger Marcel), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 21, 1306—1308 (франц.)

Методами, развитыми в предыдущем сообщении автора (РЖМат, 1954, 2711), доказано, что сокращенная однородная группа голономии несимметрического риманова пространства, если она неприводима и не изоморфна одной из пяти исключительных простых групп, является одной из следующих групп:

для $V_{2n+1}$: $SO(2n+1)$,

для $V_{4n+2}$: $SO(4n+2)$, $SU(2n+1)$, $U(2n+1)$,

для $V_{4n}$: $SO(4n)$, $SU(2n)$, $U(2n)$, $Sp(n)$,

$T^1 \otimes Sp(n)$, $SU(2) \otimes Sp(n)$.

Кроме того, допускаются для $V_8$: $SO(7)$ и для $V_{16}$: $SO(9)$.

Здесь $SO(n)$ — группа ортогональных преобразований $n$-мерного действительного пространства, $U(n)$ — группа унитарных преобразований $n$-мерного комплексного пространства, $SU(n)$ — группа таких же преобразований с определителем 1, $Sp(n)$ — группа унитарных преобразований $n$-мерного пространства над телом кватернионов, $T^1$ — группа вращений окружности, $\otimes$ — знак прямого произведения. *А. М. Васильев*

**5251. Формула типа Гаусса — Боннэ для тензорных полей Понтрягина. Абрамов А. А.,** Докл. АН СССР, 1953, **93**, № 5, 757—758

Рассматриваются тензорные поля Понтрягина (Понтрягин Л. С., Докл. АН СССР, 1944, **43**, № 3, 95) для пространства аффинной связности класса дифференцируемости $k \geqslant 3$

$$\Phi_{x_1 \ldots x_p} = \Sigma\, c\, \Pi_{x_1 \ldots \ldots} \Pi_{\ldots x_p},$$

где $\Pi_{x_1 \ldots x_{2q}} = R^{\alpha_1}_{\alpha_2, [x_1 x_2} R^{\alpha_2}_{|\alpha_1|, x_3 x_4} \ldots R^{\alpha_q}_{|\alpha_1|, x_{2q-1} x_{2q}]}$,

$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ — тензор кривизны. На $r$-мерной области $V_r$ исходного $n$-мерного пространства $A_n$ задается поле $E$ $n$-репера $\{\underset{1}{e}, \ldots, \underset{n}{e}\}$; это поле определяет линейные дифференциальные формы $\omega^a_b : \underset{b}{de} = \omega^a_b \underset{b}{e}$, $\underset{b}{de}$ — ковариантный дифференциал $\underset{b}{e}$. С помощью этих форм строится такой кососимметрический тензор $X$, что $X' = \Phi$. Далее доказывается, что, если цикл $C_{p-1}$ ограничивает $D_p \subset A_n$ и на $C_{p-1}$ задано поле $n$-репера $E$, с помощью которого можно образовать тензорное поле $X$, то

$$\int_{D_p} \Phi_{x_1 \ldots x_p}\, dx^{x_1} \ldots dx^{x_p} - \int_{C_{p-1}} X$$

не зависит от исходной аффинной связности и не меняется при непрерывной деформации $E$; эта теорема является аналогом формулы Гаусса—Боннэ для полей Понтрягина. Далее указывается, что единственные топологические инварианты, которые можно получить в пространстве аффинной связности интегрированием по циклам кососимметрических тензорных полей, компоненты которых суть аналитические функции $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}, \partial_{\mu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}, \ldots, \partial_{\mu_1 \ldots \mu_s}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, это те, которые получаются интегрированием полей типа $\Psi_{x_1 \ldots x_{4q}} = \Sigma\, c\, \Pi_{[x_1 \ldots x_{4q_1}} \ldots \Pi \ldots x_{4q}]$ (если $\Phi_{x_1 \ldots x_p}$ есть тензорное поле Понтрягина, не являющееся полем типа $\Psi_{x_1 \ldots x_{4q}}$, то $\int \Phi_{x_1 \ldots x_p} dx^{x_1} \ldots dx^{x_p}$ распространенный по любому $p$-мерному циклу $C_p$ равен нулю).

Работа служит продолжением предыдущих исследований автора (Докл. АН СССР, 1951, **81**, № 2, 125). *И. М. Яглом*

**5252. Замечание о числах Бетти римановых многообразий. I. Томонага** (Note on Betti numbers of Riemannian manifolds. I. Tomonaga Yasuro), J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 1, 59—64 (англ.)

Бохнер и Лихнерович (Bochner S., Ann. Math. 1948, **49**, 379—390. Lichnerdwicz A., C. r. Acad. sci., 1948, **226**,1678—1680) доказали, что при $p \geqslant 2$ число Бетти $B_p \leqslant \binom{n}{p}$, если в каждой точке компактного риманова многообразия квадратичная форма относительно кососимметрических тензоров $f^{ik}$

$$((p-1)\, R_{ikls} + 2R_{il}g_{ks})\, f^{ik} f^{ls}$$

является положительно полуопределенной. Если эта форма положительно определенная, то $B_p = 0$. Для $p = 1$ ту же роль играет квадратичная форма $R_{ik}f^{i}f^{k}$; здесь $R_{ikls}$ — тензор кривизны, $R_{ik}$ — тензор Риччи.

Автор указывает ряд более просто проверяемых условий, достаточных для выполнения условия теоремы Бохнера—Лихнеровича. Таковыми являются для первой части теоремы: 1) для $p = 1$

$$Q + (R/n) - \sqrt{R_{ik}R^{ik} - R^2/n} \geqslant 0,$$

2) для $p \geqslant 2$

$$T = \frac{n-p}{n(n-1)} R - \sqrt{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 R_{ikls}R^{ikls} + \frac{n-4p+2}{4} R_{ik}R^{ik} + \left(\frac{1}{4} - \frac{(n-p)^2}{2n(n-1)}\right) R^2} \geqslant 0$$

либо

$$\frac{R_{ik}g_{ls}X^{il}X^{ks}}{X_{ab}X^{ab}} \geqslant \frac{p-1}{2}\sqrt{R_{ikls}R^{ikls}}$$

или же

$$\frac{R_{ikls}X^{ik}X^{ls}}{X_{ab}X^{ab}} \geqslant \frac{\sqrt{(n-2)\, R_{ik}R^{ik} + R^2}}{p-1}$$

для любого антисимметричного тензора $X^{ik}$. Для равенства числа $B_p$ нулю достаточно, чтобы эти неравенства были строгими. *А. М. Васильев*

**5253. Замечание о числах Бетти римановых многообразий. II. Томонага** (Note on Betti numbers of Riemannian manifolds II. Tomonaga Yasuro), J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 1, 65—69 (англ.)

Опираясь на связь между гармоническими тензорами на римановых многообразиях и топологическими свойствами этих многообразий (Hodge, Harmonical Integrals., 1941), автор доказывает следующие теоремы, обобщающие теорему Бохнера — Лихнеровича (см. реф. 5252).

Пусть $A_{ik}X^iX^k$ — положительно определенная квадратичная форма на многообразии. Тогда $B_1 = 0$, если квадратичная форма

$$(2A_{ik}R^i_l - \Delta A_{kl})\, X^k X^l$$

также положительно определенная, а если положительно полуопределенная, то $B_1 \leqslant n$. При $A_{ik} = \rho^2 g_{ik}$ получаем теорему: если $\rho$ — скалярная функция и

$$(2g^2 R_{ik} - (\Delta p^2)\, g_{ik})\, X^i X^k$$

положительно определенная, квадратичная форма, то $B_1 = 0$, а если полуопределенная, то $B_1 \leqslant n$.

Для $p \geqslant 2$ и положительно определенной $A_{ik}f^i f^k$ аналогичную роль играет квадратичная форма от кососимметрического тензора $X^{ikl}$:

$$\Big\{(p-1)(p-2)A_{il}R_{kqrs} + 2(p-1)g_{il}R_{qpks}A_r^p + \\ + (p-1)g_{il}R_{kq}A_{rs} + g_{il}g_{kq}R_{rp}A_s^p - \\ - \frac{1}{2}g_{il}g_{kq}\Delta A_{rs}\Big\} X^{ikr}X^{lqs}.$$

Для $A_{ik} = \rho^2 g_{ik}$, $\rho \neq 0$ получаются аналогичные следствия. Даны также упрощенные достаточные условия, обобщающие результаты первой части работы (см. реф. 5252). *А. М. Васильев*

## ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

**5254. Критические решетки нецентрального гиперкуба. Ап- Саймон** (The critical lattices of the off-centre hypercube. Ap Simon H. G.), Quart. J. Math., 1953, **4**, № 15, 204—209 (англ.)

Критической решеткой выпуклой области $n$-мерного пространства, содержащей начало координат, называется решетка наименьшего возможного детерминанта, ни одна отличная от начала точка которой не находится внутри рассматриваемого тела. В работе строится (единственная) критическая решетка для $n$-мерного гиперкуба, содержащего внутри себя начало координат, центр которого не лежит ни в одной из $(n-1)$-мерных координатных плоскостей; такой гиперкуб называется нецентральным (off-centre). Алгебраически результат работы выражается следующей теоремой: если детерминант $\Delta$ системы линейных форм

$$y_r = \sum_{s=1}^{n} a_{rs}\xi_s \quad (r = 1,2,\ldots,n)$$

не превосходит

$$\Big\{\prod_{r=1}^{n}(c_r - 1)\Big\}\Big\{1 + 2\sum_{r=1}^{n} 1/(c_r - 1)\Big\} = \Phi(c),$$

где $c_r$ $(r = 1,2,\ldots,n)$ какая-то заданная совокупность констант, больших единицы, то обязательно найдутся такие целые значения $\xi$, не все равные нулю, что $|y_r| \leqslant c_r$ $(r = 1,2,\ldots,n)$; если $a_{r,s} = \begin{cases} 2 \text{ при } s \neq r \\ c_r + 1 \text{ при } s = r \end{cases}$, $\Delta = \Phi(c)$, то при любых целых $\xi$, не всех равных нулю, найдется такой номер $t$, что $|y_t - 1| \geqslant c_t$. *И. М. Яглом*

**5255. К проблеме равносоставленности $k$-мерных многогранников. Хадвигер** (Zum Problem der Zerlegungsgleichheit $k$-dimensionaler Polyeder. Hadwiger H.), Math. Ann., 1954, **127**, № 2, 170—174 (нем.)

Приводятся некоторые необходимые условия для равносоставленности $k$-мерных многогранников. Из этих условий следует, в частности, что при $k \geqslant 3$ $k$-мерный куб и равновеликий ему правильный симплекс неравносоставлены. Для $k = 3$ это дает известный результат Дена.

Пусть $A^k$ — произвольный $k$-мерный многогранник, $A^{k-2}$ — его $(k-2)$-мерная грань и $\alpha(A^{k-2})$ — линейный угол, образованный двумя $(k-1)$-мерными гранями многогранника $A^k$, примыкающими к $A^{k-2}$. Пусть далее $f$ — произвольная (разрывная) функция, определенная для всех действительных значений аргумента и удовлетворяющая условиям $f(\alpha+\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ и $f(\pi) = 0$. Рассмотрим функционал

$$\psi(A^k) = \Sigma f(\alpha(A^{k-2}))\varphi(A^{k-2}) \qquad (1)$$

(суммирование по всем $(k-2)$-мерным граням многогранника $A^k$). Если под $\varphi(A^{k-2})$ понимать в этой формуле $(k-2)$-мерный объем грани $A^{k-2}$, то функционал $\psi$ инвариантен при движениях и, как нетрудно видеть, аддитивен, т. е. принимает равные значения для равносоставленных многогранников. Вообще, если $\varphi$ есть аддитивный инвариантный относительно движений функционал, заданный на множестве всех $(k-2)$-мерных многогранников, то функционал $\psi$, определенный формулой (1), также аддитивен и инвариантен. Для равносоставленности многогранников $A^k$ и $B^k$, очевидно, необходимо, чтобы для всякого аддитивного инвариантного функционала $\Psi$ (и, в частности, для построенных выше) выполнялось равенство $\psi(A^k) = \psi(B^k)$. Вопрос о достаточности этих условий в работе не рассматривается. Если $\alpha$ — число, несоизмеримое с $\pi$, то легко можно построить (при помощи трансфинитной индукции) такую функцию $f$, удовлетворяющую указанным выше условиям, что $f(\alpha) \neq 0$. Из этого вытекает, что при $k \geqslant 3$ многогранник $A^k$ только тогда может быть равносоставлен с равновеликим ему $k$-мерным кубом, когда все углы $\alpha(A^{k-2})$ многогранника $A^k$ соизмеримы с $\pi$. В частности, правильный симплекс при $k \geqslant 3$ неравносоставлен с $k$-мерным кубом. *В. Г. Болтянский*

**См. также:** 5014, 5018, 5079, 5090, 5099, 5146, 5155 К

## ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

**5256. Осциллирующие функции и их приложение к приближенному решению интегральных уравнений. Мельник С. И.,** Докл. АН СССР, 1954, **95**, № 4, 705—708

Функция $f$ называется осциллирующей в области $\omega$, если для некоторой разбивки $\omega$ на неперекрывающиеся части $\omega_i$ $(i = 1,\ldots,n)$ будет $\int_{\omega_i} f\,d\omega = 0$. Для характеризации $f$ приняты параметры: $d$ — наибольший из диаметров областей $\omega_i$ и $M = \Big[\text{mes}^{-1}\,\omega \int_{\omega} f^2\,d\omega\Big]^{1/2}$. Записывают $f \in O(d,M)$.

Если $f$ есть сумма осциллирующих функций

$$f=\sum_{k=1}^{\infty} f_k,\ f_k\in O(d_k,\ M_k),$$

то с $f$ связывают число $M=\sum_{k=1}^{\infty} d_kM_k$. Сокращенно пишут $f\in\sum o(M)$.

Рассматривается интегральное уравнение

$$u(p)-f(p)-\int_{\omega} k(p,\ q)\,u(q)\,d\omega=0, \qquad (1)$$

где $f$ считается осциллирующей функцией. Имеют место две следующие просто доказываемые теоремы:

1. Если $f\in O(d,\ M)$, $\|k^{-1}\|$ и $\|k^{-1}\|_r$ есть нормы в метриках $L_2$ и $C$ оператора, обратного для уравнения (1), то

$$|u(p)-f(p)|\leqslant\|k^{-1}\|_r\varepsilon(p,\ d)\,M\,\mathrm{mes}\,\omega,$$

$$|u(p)-f(p)|\leqslant$$

$$\leqslant\left[1+\left(\int_{\omega}k^2d\omega\right)^{1/2}\|k^{-1}\|\right]\varepsilon(p,\ d)\,M\,\mathrm{mes}\,\omega,$$

где $\varepsilon(p,\ d)=\sup_{q_1,\ q_2}|k(p,\ q_2)-k(p,\ q_1)|$ при $\rho(q_1,\ q_2)<d$.

2. Если ядро $k(p,\ q)$ удовлетворяет условию Липшица

$$|k(p,\ q_2)-k(p,\ q_1)|\leqslant A\rho(q_1,\ q_2) \quad\text{и}\quad f\in\sum o'(M),$$

то

$$|u(p)-f(p)|\leqslant\|k^{-1}\|_r AM\,\mathrm{mes}\,\omega$$

и

$$|u(p)-f(p)|\leqslant\left[1+\left(\int_{\omega}k^2d\omega\right)^{1/2}\|k^{-1}\|\right]AM\,\mathrm{mes}\,\omega.$$

Указывается также, как в некоторых случаях эти теоремы могут быть использованы для оценки погрешности приближенного решения интегрального уравнения (1). *В. И. Крылов*

**5257. О решении конечно-разностного уравнения, аппроксимирующего задачу Дирихле для уравнения Лапласа, на электрических сетках. Шура-Бура М. Р.**, Вычисл. матем. и вычисл. техника, 1953, № 1, 46—55

Пусть решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в $n$-мерной области проводится моделированием на электрических сетках. Проводимости между узлами (в работе рассматривается простейшая сетка) практически не могут быть изготовлены абсолютно одинаковыми. Отклонения проводимостей от заданной величины рассматриваются автором как независимые случайные величины, среднее значение которых равно нулю, а дисперсия равна некоторой постоянной $\sigma^2$. Отклонения проводимостей вызывают отклонение $V(P)$ потенциала в узле $P$ от значения, принимаемого потенциалом при тех же граничных условиях в отсутствие отклонения проводимостей. Отклонение потенциала также является случайной величиной, оценка дисперсии которой является целью работы.

Пользуясь свойствами функции $G(P,\ Q)$, являющейся конечно-разностным аналогом функции Грина, автор приходит к следующему неравенству:

$$D^2[V(P)]\leqslant M^2\sigma^2h^2G(P,P),$$

где $h$ — шаг сетки, а $M$ — верхняя грань абсолютных величин частных производных искомого решения $u$ по независимым переменным.

Для дисперсии при уменьшающемся шаге $h$, т. е. увеличении числа узлов сетки, дается асимптотическое равенство

$$D^2[V(P)]\sim\frac{C_n}{n}\sigma^2h^2\,|\,\mathrm{grad}\,u|^2,$$

где $C_n=G_1(P,\ P)$ — значение функции Грина для $n$-мерного куба, объемлющего данную область.

В случае $n>2$ величина $C_n$ остается ограниченной при $h\to 0$, а для $n=2$ — приближенно равна $(2\pi)^{-1}\ln 1/h$.

В конце статьи дается оценка дисперсии отклонений потенциала при решении задачи Дирихле для любого самосопряженного эллиптического уравнения на электрической сетке в виде неравенства

$$D^2[V(P)]\leqslant C^2\sigma^2G(P,\ P),$$

где $C$ — верхняя грань $|u_Q-u_P|$, т. е. разностей значений потенциалов в соседних узлах сетки.

Реферируемая статья представляет собой расширенное подробное изложение результатов, опубликованных в Докл. АН СССР, 1951, 78, № 1, 21—24. *Т. И. Маруашвили*

**5258. Об одном дефекте метода прямых. Камынин Л. И.**, Докл. АН СССР, 1954, 95, № 1, 13—16

Автор анализирует бесконечные системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$d^ku_n/dt^k=\sum_{\alpha=-s}^{r}C_\alpha u_{n+\alpha}, \qquad (1)$$

$$d^lu_n(0)/dt^l=\varphi_l(n),\ l=0,\ 1,\ \ldots,\ k-1;$$
$$n=0,\ \pm1,\ \ldots \qquad (2)$$

Такие системы возникают при решении по методу прямых задачи Коши с начальными данными на бесконечной прямой для линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Ранее (РЖМат, 1953, 268) автор установил различие между теоремами единственности для уравнения теплопроводности и для его конечно-разностного аналога. В данной заметке указывается, что ограничения на рост начальных функций $\varphi_l$ и искомого решения $u_n(t)$, достаточные для единственности решения (1), (2), зависят лишь от постоянных $r$, $s$, $k$ (т. е. от свойств самой бесконечной системы (1), (2)) и не связаны с частным видом того уравнения, из которого была получена система (1), (2). Так, например, волновое уравнение $\partial^2u/\partial t^2=\partial^2u/\partial x^2$ имеет единственное решение при любых сколь угодно быстро растущих начальных функциях, тогда как соответствующая ему по методу прямых бесконечная система вида (1) имеет единственное решение лишь при определенных ограничениях на рост функций $\varphi_l$ и самого решения

$u_n(t)$. Это обстоятельство автор называет «дефектом метода прямых».

Утверждается, что имеет место следующая теорема.

Система (1), (2) ($C_\alpha$ можно заменить на $C_{n+\alpha}$, если $|C_{n+\alpha}| \leqslant C$) всегда имеет решение, если

$$|\varphi_l(n)| = O([(1-\varepsilon)\,kn/r]!), \quad C_r \neq 0, \quad r \geqslant 1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

$$|\varphi_l(n)| = O([(1-\varepsilon)\,k|n|/s]!), \quad C_{-s} \neq 0, \quad s \geqslant 1, \quad n = -1, -2, \ldots \tag{4}$$

Это решение единственно в классе функций

$$|d^l u_n(t)/dt^l| = O([(1-\varepsilon)\,kn/r]!), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

$$|d^l u_n(t)/dt^l| = O([(1-\varepsilon)\,k|n|/s]!), \quad n = -1, -2, \ldots, \tag{6}$$

$l = 0, 1, \ldots, k-1$; $|t| \leqslant T < +\infty$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Если же вместо $\varepsilon$ в (5) и (6) поставить $-\varepsilon$, то существует не равное нулю решение (1), (2) при $\varphi_l \equiv 0$. Если $r = 0$, то условия (3), (5) снимаются; если $s = 0$, то снимаются условия (4), (6).

*О. А. Ладыженская*

**5259. Численное решение граничных задач для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Микеладзе Ш. Е.,** Сообщ. АН ГрузССР, 1953, 14, № 3, 133—137

Пусть требуется найти на интервале $0 \leqslant x \leqslant l$ решение $y(x)$ граничной задачи

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{1}$$

$$\sum_{m=0}^{n-1} \alpha_{mi} y^{(m)}(0) + \sum_{m=0}^{n-1} \beta_{mi} y^{(m)}(l) = \gamma_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2}$$

Для нахождения приближенного решения $y(x)$ уравнение (1) предлагается заменить следующей системой:

$$y^{(k)}(x) = L[x, y^{(k)}(0), y^{(k+1)}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)] + \frac{1}{(n-k-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-k-1} y^{(n)}(t)\,dt \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{3}$$

где

$$L[x, y^{(k)}(0), y^{(k+1)}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)] = \sum_{\nu=0}^{n-k-1} \frac{x^\nu y^{(k+\nu)}(0)}{\nu!}.$$

Полагая в (3) $x = h, 2h, \ldots, mh = l$ и заменяя в полученных соотношениях интегралы конечными суммами по соответствующим образом выбранным квадратурным формулам, придем к системе уравнений

$$y_\sigma^{(k)} = L[\sigma h, y^{(k)}(0), y^{(k+1)}(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)] + h^{n-k} \sum_{\mu=0}^{r} A_{\sigma k} f_\mu \quad (r \leqslant m) \tag{4}$$

$(k = 0, 1, \ldots, n-1;\ \sigma = 0, 1, \ldots, m)$,

где

$$y_\sigma^{(k)} \equiv y^{(k)}(\sigma h),$$

$$f_\mu \equiv (\sigma - \mu)^{n-k-1} f(\mu h, y_\mu, y'_\mu, \ldots, y_\mu^{(n-1)}),$$

а $A_{\sigma\mu}$ — величины, зависящие от коэффициентов использованных квадратурных формул. Вместе с граничными условиями (2) система (4) позволяет определить все $y_\sigma^{(k)}$. Указывается, что метод применим и для случая нелинейных граничных условий.

Применение метода иллюстрируется на решении уравнения для определения прогибов при выпучивании стержня, приведенного к виду

$$y'' = -11{,}44353y(1 - 0{,}5y'^2), \quad y'(0) = 0, \quad y(0{,}5) = 0.$$

*М. К. Керимов*

**5260. Заметки о численном интегрировании. I. Буквич** (Beiträge zur numerischen Integration. I. Bukovics E.), Monatsh. Math., 1953, 57, № 3, 217—245 (нем.)

Даются оценки погрешности предложенного Блессом метода численного интегрирования дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

и принадлежащего автору обобщения этого метода.

По Блессу сначала находятся последовательно в точках $x_i = x_0 + ih$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ «грубые» значения $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ с помощью первых членов разложения этих функций по формуле Тейлора около точки $x_{i-1}$. После этого значения $y^{(j)}$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ в точке $x_k$ «исправляются» путем прибавления поправок вида $\sum_{i=1}^{k} A_{ji} f_i$, где $f_i$ вычисляются по грубым значениям $y^{(j)}$ в точке $x_i$. Автор предлагает брать поправку в виде

$$\sum_{i=1}^{k} \left[A_{ji} + B_{ji} \frac{\partial f_0}{\partial y^{(n-1)}}\right] f_i$$

В работе автора (Österr. Ingr-Arch., 1950, 4, 338—349) доказывается, что коэффициенты могут быть выбраны так, что погрешность $y_k^{(j)}$ будет относительно $h$ порядка $n - j + 2$ в методе Блесса и порядка $n - j + 3$ для обобщения Буковича.

Для обоих методов строится разностное уравнение для функции, мажорирующей погрешность, и дается оценка его решения через константу Липшица для $f$, а также максимальные значения $|f_{y^{(n-1)}}|$, $\left|\frac{df}{dx}\right|$, $\left|\frac{d^3 f}{dx^3}\right|$, а для метода Буковича, еще и $|f|$, $\left|\frac{d^2 f}{dx^2}\right|$ и константу Липшица для $f_{y^{(n-1)}}$.

В заключение даны с числовыми коэффициентами формулы для $n = 2$, $k = 5$; $n = 3$, $4$, $k = 4$, а также таблицы некоторых функций, входящих в разностное уравнение для оценки погрешности. Автор подчеркивает, что в методе Блесса особенно удобно параллельно с решением самого уравнения

получать оценку погрешности, решая соответствующее разностное уравнение. *К. А. Семендяев*

**5261. Заметки о численном интегрировании. II.** Буковић (Beiträge zur numerischen Integration. II. Bukovics Erich), Monatsh. Math., 1954, **57**, № 4, 333—350 (нем.)

Для интегрирования уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ методом Рунге — Кутта в той форме, к которой он был приведен Цурмюлем (Коллатц, Численные методы решения дифференциальных уравнений, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953), дается оценка погрешности аналогично тому, как это было сделано в первой части статьи для метода Блесса (см. реф. 5260). В оценках фигурируют константа Липшица для $f$ и максимальные значения модулей 3-й и 4-й производных от $f$. Для $n \leqslant 4$ даны формулы с численными коэффициентами.

Оценка погрешности метода Рунге — Кутта за один шаг была дана Бибербахом (Bieberbach, Z. angew. Physik, 1951, **2**, 233—248) в несколько других предположениях. Автор указывает, что его оценка для погрешностей $y^{(j)}$ более точна (в порядке), чем оценка Бибербаха.

В заключение делается общее сравнение методов Рунге — Кутта и Блесса. Оказывается, что погрешность метода Рунге — Кутта при равных шагах в несколько раз меньше, чем у метода Блесса. Отмечается, что для разностных методов ошибка существенно зависит от ошибок первых шагов и разностное уравнение для оценки ошибок существенно сложнее. *К. А. Семендяев*

**5262. Применение полиномов Чебышева при решении линейных систем высокого порядка.** Ланцош (Chebyshev polynomials in the solution of large-scale linear systems. Lanczos Cornelius), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952 Sept., 1953, 124—133 (англ.)

Рассматривается решение линейных систем $C_0 y = c_0$ с положительно определенной эрмитовской матрицей $C_0$, собственные значения которой находятся в промежутке (0,1) (общий случай указанных матриц сводится к этому делением всех элементов матрицы $C = (c_{ij})$ на число $\mu$, где $\mu = \max_i \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|$). Для решения системы строятся приближения в виде

$$y_m = \left(\frac{2}{m+2}\right)^2 g_m, \text{ где } g_m = g_m(B)\, c_0,\ B = 2I - 4C_0.$$

Полиномы $g_m(x)$ выражаются через полиномы Чебышева:

$$g_m(x) = \frac{T_{m+2}(1-2x) + 2(m+2)^2 x - 1}{8x^2}$$

Если $v_1, \ldots, v_n$ — компоненты решения по отношению к базису из собственных векторов матрицы $C_0$, $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — компоненты вектора невязки $\varphi_m = c_0 - C_0 y_m$ по отношению к тому же базису, то $\rho_i = F_{m+1}(\lambda_i)\, v_i$, где

$$F_{m+1}(x) = 1 - \left(\frac{2}{m+1}\right)^2 x g_m(x).$$

Полиномы $F_{m+1}(x)$ (а по ним и полиномы $g_m(x)$) конструируются так, чтобы выполнялось граничное условие $F_{m+1}(0) = 1$ и вместе с тем, чтобы значения $F_{m+1}(x)$ были бы возможно меньшими всюду в промежутке (0,1). В описанном выше процессе в качестве $F_{m+1}(x)$ берется полином, связанный с ядром Фейера:

$$F_k(x) = \frac{1 - T_{k+1}(1-2x)}{(k+1)^2 2x}$$

Исследование быстроты сходимости итерационного процесса автор связывает с дисперсией собственных чисел матрицы $C_0$, которая характеризуется отношением наименьшего собственного значения матрицы к наибольшему (spread, по терминологии автора). При этом автор считает дисперсию системы тем большей, чем меньше это отношение.

Показывается, что применение процесса при $m = 6$, т. е. построение приближенного решения при помощи шести итераций, доставляет приближенное решение с точностью до 5% для систем, дисперсии которых характеризуются отношением не меньшим чем 1/10, независимо от порядка системы. Повторение цикла с вектором невязки в качестве свободного члена увеличивает точность решения до 0,22%. Двойной цикл доставляет приближенное значение с точностью до 5% для систем, дисперсия которых характеризуется отношением 1/16, пятикратный цикл — для систем с отношением 1/40. Автор рассматривает указанный алгоритм, легко программируемый на быстродействующих машинах, как универсальный алгоритм для решения систем любого порядка с умеренной дисперсией.

Строится аналогичный алгоритм на основе выбора в качестве $F_{m+1}(x)$ полинома, связанного с несколько видоизмененным ядром Дирихле, позволяющий применением одного цикла из семи итераций получать приближенное решение с точностью до 5% для систем с отношением 1/40.

Наряду с приближенным решением системы ставится вопрос о нахождении алгоритма, позволяющего уменьшать дисперсию системы, т. е. переводящего собственные значения матрицы, расположенные между очень малым значением $\lambda_0$ и 1, в значения, расположенные между $\tau$ и 1, где $\tau$ значительно больше $\lambda_0$ [$\tau \approx 0{,}1$]. Эта задача решается подбором полиномов $Q_m(x)$ с граничным условием $Q_m(0) = 0$, значения которых в промежутке (0,1), будучи меньшими единицы, всегда больше $\tau$. При подборе используются свойства производной полиномов Чебышева $T_m(1-2x)$. Решение задачи дается полиномом

$$Q_m(x) = \frac{1-\tau}{2}\left[1 - T_m(1-2x)\right] + \tau\left[1 - \frac{1}{m^2} T'_m(1-2x)\right].$$

Для систем с большой дисперсией [1/240, 1/960] строятся алгоритмы, использующие полином $Q_5(x)$ и некоторые его комбинации.

Отмечается, что для систем с большой дисперсией универсальный алгоритм дает плохое приближение к решению; однако это приближение целесообразно брать в качестве начального вектора при применении других итерационных процессов.

5*

Указывается связь с проблемой уточнения грубых приближений к собственным значениям матрицы. Формула (18) неверна. *В. Н. Фаддеева*

5263. **Ошибки при итерационном решении линейных систем. Хаусхолдер** (Errors in iterative solutions of linear systems. Householder A. S.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952 Sept., 1953, 30—33 (англ.)

Для решения линейной алгебраической системы $Ax = y$ на цифровой быстродействующей машине применяется итерационный процесс $x_{p+1} = f(x_p)$. Ставится вопрос об условиях, при которых остаточный вектор $r_{p+1} = y - Ax_{p+1}$ «лучше», чем остаточный вектор предыдущего приближения. В качестве меры для измерения степени приближения применяются 1-ая норма векторов и подчиненная ей норма матриц (Фаддеева В. Н., Вычислительные методы линейной алгебры, Гостехиздат, М.—Л., 1950). При оценке $N(r_{p+1})$ рассматриваются четыре типа округления величин, участвующих в вычислениях. Даются условия, обеспечивающие неравенство $N(r_{p+1}) < (N r_p)$ для этих четырех типов.

*В. Н. Фаддеева*

5264. **Обращение матрицы при помощи последовательного окаймления. Лоткин, Ремидж** (Matrix inversion by partitioning. Lotkin M., Remage R.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952 Sept., 1953, 36—41 (англ.)

Работа посвящена вычислению обратной матрицы методом последовательного окаймления. Для положительно определенной матрицы дается детальное описание вычислительной схемы, приспособленной для работы на быстродействующих машинах. Особенное внимание уделяется вопросу масштаба при работе на машинах с фиксированной запятой. Дается формула для оценки ошибок округления.

*В. Н. Фаддеева*

5265. **Исследование ошибок и определение масштабных множителей при обращении матрицы последовательным окаймлением. Лоткин, Ремидж** (Scaling and error analysis for matrix inversion by partitioning. Lotkin Mark, Remage Russell), Ann. Math. Statistics, 1953, 24, № 3, 428—439 (англ.)

Первые четыре раздела работы совпадают с предшествующей работой авторов (см. реф. 5264). Далее проводится анализ накопления ошибок округления, происходящих от перехода к вычислению с числами, имеющими фиксированное количество разрядов. Устанавливается связь между $E = \| M^{-1} - \overline{M}^{-1} \|$ и $\| A^{-1} - \overline{A}^{-1} \|$, где $M$ — матрица, получаемая из $A$ окаймлением, $\overline{M}^{-1}$ и $\overline{A}^{-1}$ — соответствующие приближения к $M^{-1}$ и $A^{-1}$, полученные в результате обращения после перехода к числам с заданным количеством разрядов, $\| A \| = \max_{i,j} | a_{ij} |$. Это позволяет выполнять обращение матрицы с заданной степенью точности, исправляя промежуточное обращение в случае, если величина $E$ окажется слишком большой. Авторы подчеркивают, что возможность такого исправления делает метод последовательного окаймления вполне пригодным при практических вычислениях. *В. Н. Фаддеева*

5266. **О решении системы линейных алгебраических уравнений способом Ю. А. Шрейдера. Зорова А. И.**, Вычисл. матем. и вычисл. техника, 1953, № 1, 90—94

Дается рабочая схема для решения системы линейных уравнений $Ax = y$ по методу ортогонализации (Шрейдер Ю. А., Докл АН СССР, 1951, 76, № 5, 651—654). Сообщаются результаты вычисления для двух систем десяти уравнений с десятью неизвестными. Констатируется, что в случае хорошей обусловленности системы метод дает достаточно хороший результат, для плохо обусловленной системы имеет место значительная потеря точности.

*В. Н. Фаддеева*

5267. **О вычислении неопределенного интеграла с малым числом значений интегрируемой функции. Крылов В. И.**, Докл. АН СССР, 1954, 94, № 4, 613—614

При составлении таблиц определенного интеграла $y_n = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx$, где $x_n = x_0 + nh$ $(n = 1,2,\ldots)$, по формуле

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x)\,dx$$

удобно использовать квадратурные формулы, в которых узлы берутся сходственными группами: $\alpha + p_i h$, $\beta + q_i h, \ldots, \lambda + t_i h$, где $x_n \leqslant \alpha, \beta, \ldots, \lambda \leqslant x_{n+1}$; $p_i$, $q_i$, $t_i$ — целые числа, так как в таких формулах каждый узел используется многократно. Если $m$ — число основных узлов, а $n+1$ число всех узлов, то при любых $p_i, q_i, \ldots, t_i$ можно так выбрать $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, что соответствующая квадратурная формула будет точной для всех полиномов степени $m+n$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы квадратурная формула была интерполяционной и полином, имеющий своими простыми корнями все ее узлы, был ортогонален любому полиному степени меньше $m$ на сегменте $[x_n, x_n + h]$. Построить формулу такого типа, точную для всех полиномов степени $m+n+1$, невозможно. Доказательства не приводятся. *М. Л. Бродский*

5268. **Некоторые случаи кубатурной формулы Л. А. Люстерника для правильных многоугольников. Иванова А. И.**, Вычисл. матем. и вычисл. техника, 1953, № 1, 27—36

Употребляя общий метод получения кубатурных формул (Люстерник Л.А., Диткин В. А., Докл. АН СССР, 1948, 61, № 3, 441—444; Люстерник Л. А., Докл. АН СССР, 1948, 62, № 4, 449—452), автор выписывает формулы для следующих частных случаев:

1. Область $Q$ — правильный треугольник; даны формулы со степенью точности 3 и 5.
2. $Q$ — квадрат; даны формулы со степенью точности 5 и 7.
3. $Q$ — правильный шестиугольник; приведены формулы со степенью точности 3, 5, 7.
4. Для правильной шестигранной призмы — формулы 3 и 5 степеней точности.
5. Для куба — формулы 3 и 5 степеней точности.

*В. И. Крылов*

**5269. Новый метод приближенного вычисления определенного интеграла. Андрейков П.**, Сб. студ. науч.-исслед. работ Белорусской с.-х. акад., 1953, № 1, 114—122

Выводятся квадратурные формулы: 1) $\int_a^b f(x)\,dx \approx$

$$\approx \frac{1}{n}(b-a)\left[\sum_{l=0}^{n} y_l - \frac{1}{24}(15y_0 - 4y_1 + y_2 + y_{n-2} - 4y_{n-1} + 15y_n)\right];$$

2) $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{n}(b-a)\left[\sum_{l=0}^{n} y_l - \frac{1}{24}(16y_0 - 7y_1 + 4y_2 - y_3 - y_{n-3} + 4y_{n-2} - 7y_{n-1} + 16y_n)\right]$, где $y_i = f\left[a + \frac{i}{n}(b-a)\right]$.

Первая формула точна для полиномов не выше второй, вторая — не выше третьей степени. Точность формул проиллюстрирована примерами.

*М. Л. Бродский*

**5270. Об остаточном члене в формулах для численного интерполирования, дифференцирования и квадратуры. Гоин** (On the remainder in formulas of numerical interpolation, differentiation and quadrature. Goheen Harry), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 1, 44—46 (англ.)

Элементарная статья, не содержащая новых результатов. *В. И. Крылов*

**5271. Математические методы, применяемые в исследованиях теоретической физики, в частности приближенные методы в квантовой механике. Гомбаш** (Elméleti fizikai kutatásokban alkalmazott matematikai módszerek különös tekintettel a kvantummechanikai közelítö módszerekre. Gombás Pál), Magyar tudoman. akad. Mat. es fiz. osztalyanak közlemenyei, 1953, **3**, № 3, 329—331 (венг.)

Приводятся доклад П. Гомбаша и выступления, посвященные различным приближенным математическим методам в теоретической физике.

**5272. Вероятностные методы численного решения некоторых проблем анализа. Вазов** (Metodi probabilistici per la risoluzione numerica di alcuni problemi di analisi. Wasow Wolfgang), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 248—250 (итал.)

Популярная статья о вероятностных методах численного анализа (так называемый метод «Монте-Карло»).

**5273. Сравнение стохастических и прямых методов решения некоторых специальных задач. Томас** (A comparison of stochastic and direct methods for the solution of some special problems. Thomas L. H.), J. Operations Res. Soc. Amer., 1953, **1**, 181—186 (англ.)

Перевод из Math. Rev., 1954, **15**, № 1, 64.

**5274. Графические методы решения интегральных уравнений. Штыкан А. Б.**, Инж. сб., 1953, **15**, 216—222

Рассматривается решение нелинейных интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра с вырожденными ядрами. Решение уравнения

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,s)\,[u(s)]^n ds \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (1.1)$$

сводится к системе алгебраических уравнений с коэффициентами при неизвестных в виде интегралов, значения которых находятся графически. Решение уравнений вида

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,s)\,\mu[u(s)]\,ds, \qquad (1.4)$$

равно как и уравнений вида (1.1), может быть осуществлено сразу для всех значений $x \in [a,b]$ последовательными приближениями. Для этого уравнение (1.4) переписывается в виде

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \psi_i(x) \sum_{i=1}^{n} \int_a^b \chi_i(s)\,\mu[u(s)]\,ds \qquad (a)$$

и последовательными приближениями строятся коэффициенты, которые затем умножаются на известные функции $\lambda\psi_i(x)$, и полученные ординаты суммируются, что также выполняется графически. Решение уравнений Вольтерра с вырожденными ядрами осуществляется сразу без предварительного построения вспомогательных кривых. Используются приемы, приведенные в другой статье автора «Графические методы решения некоторых задач математического анализа» (Инж. сб., 1952, **13**, 177—186).

См. также РЖМат, 1954, 1823. *Ю. Ф. Харкеевич*

**5275. Номограммы для расчета регенераторов стеклоплавильных печей. Вебер-Клейн** (Nomogramme zur Bemessung der Regeneratoren von Glasschmelzöfen. Weber-Klein Paul), Glastechn. Ber., 1953, **26**, № 2, 33—37 (нем.)

Приводится несколько составных сетчатых номограмм, позволяющих вести графический расчет регенерационных камер (определять размер камер и их форму) при заданной температуре предварительного подогрева воздуха. Кроме того, номограммы позволяют проанализировать влияние различных факторов. Аналогичные номограммы могут быть построены при других исходных данных (температура отходных газов, расстояние между решетками).

*Г. С. Хованский*

**5276. Графические вычисления (номограмма № 17). Расчет концентрации при выпаривании растворов солей. Орличек** (Graphische Umrechnungsbilder (Nomogramm № 17). Die Berechnung der Konzentration beim Eindampfen von Salzlösungen und dergleichen. Orlicek A. F.), Mittl. Chem. Forschungsinst. Wirtsch. Österr., 1953, **7**, № 3, 58—59 (нем.)

Приводится номограмма с тремя параллельными шкалами для определения количества воды, которое следует выпарить из 100 *г* раствора определенной концентрации, чтобы получить раствор заданной концентрации. *Г. С. Хованский*

5277. **Номограмма для оценки рентабельности нефтяной скважины** (How to use the oil-well evaluation nomograph), Oil and Gas J., 1953, **52**, № 22, 209—211 (англ.)

Приводится номограмма для определения стоимости нефти, которую можно добыть из нефтяного пласта при помощи скважины. Расчетная формула в работе не приводится, но из конструкции номограммы видно, что искомая величина пропорциональна произведению 10 переменных таких, как площадь нефтеносного слоя в акрах, его толщина в футах, пористость, содержание воды, к. п. д. в процентах, стоимость нефти в долларах и др.

*И. Н. Денисюк*

5278. **Номограмма для определения объема круглого леса. Люнцман** (Kubiernomogramm für Rundholz. Lünzmann K.), Z. Weltforstwirtsch., 1953, **16**, № 2, Beilage (нем.)

Приводятся две номограммы с тремя параллельными шкалами для определения объема круглого леса по среднему диаметру и длине ствола. Номограммы отличаются пределами изменения переменных.

*Г. С. Хованский*

5279. **Кубические футы, галлоны, фунты и тонны воды в прямоугольных резервуарах** (Cubic feet, gallons, pounds, and tons of water in rectangular tanks), Water and Sewage Works, 1953, **100**, № 5, R-132 (англ.)

Предлагается номограмма из выравненных точек для определения емкости прямоугольных резервуаров, по которой одновременно определяется вес содержащейся в резервуаре воды, причем, если измерения даны в дюймах, то объем определяется в куб. футах и галлонах, а вес — в фунтах и тоннах.

*Г. Е. Джемс-Леви*

5280 К. **Дух прикладной математики. Коулсон** (The spirit of applied mathematics. Coulson C. A., 23 pp., Clarendon Press, Oxford, 1953, 0.60 doll.)

Перевод из Math. Rev., 1953, **14**, № 9, 835.

5281 Д. **Распространение теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах на произвольные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. Майоров И. В.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гос. пед. ин-т, М., 1954

## ТАБЛИЦЫ

5282 К. **Таблицы площадей сфероидических трапеций. Беликов Е. Ф.**, Разработ. Всесоюз. проектным ин-том «Гидроэнергопроект», 47 стр., Госэнергоиздат, М.—Л., 1953, 2 р. 25 к.

5283 РЕЦ. **Статистические таблицы для научных исследований в области биологии, сельского хозяйства и медицины. Фишер, Йейтс** (Statistical tables for biological, agricultural and medical research. Fisher Ronald A., Yates Frank, 4-th ed., rev. and enlarged, XI+126 pp., Oliver and Boyd, Ltd, Edinburgh — London, 1953, 21 s.) [Рецензия: Гаддум (Gaddum J. H.), Nature, 1954, **173**, № 4396, 183 (англ.)]

**См. также:** 5109, 5116, 5126, 5128, 5132, 5144, 5188К

## АЛГЕБРА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

5284. **Проблема Дарлингтона. Уэйнберг** (The Darlington problem. Weinberg Louis), J. Appl. Phys. (N. Y.), 1953, **24**, № 6, 776—779 (англ.)

Излагается метод реализации (с точностью до постоянного множителя $H$) заданной функции комплексного переменного $s$: $K = p(s)/q(s)$, где $p(s)$ — четный или нечетный многочлен с положительными коэффициентами, а $q(s)$ — некоторый многочлен Гурвица, посредством коэффициента передачи $K \equiv E_2/E_1$, где $E_1$ — входное, а $E_2$ — выходное напряжение некоторой схемы Дарлингтона, т. е. схемы, содержащей только одно активное сопротивление, которое может либо служить нагрузкой, либо находиться внутри этой схемы.

Изложенный метод позволяет осуществить синтез такой схемы Дарлингтона, которая не содержит взаимоиндукций и заканчивается реактивным двухполюсником. Этот метод аналогичен методу синтеза $RC$-схем (Guillemin E. A., J. Math. and Phys., 1949, **28**, 22—42).

В реферируемой статье автор использует для синтеза $RLC$-схем процедуру, которая была им ранее использована для синтеза $RC$-схем.

*В. И. Шестаков*

5285. **Группы преобразований триодов. Кин** (Triode transformation groups. Keen A. W.), Wireless Engr, 1953, **30**, № 10, 238—243 (англ.)

Как известно (Keen A. W., Wireless Engr, 1951, **28**, 55—66), триод можно использовать в цепи передачи шестью различными способами: *gca*, *cga*, *agc*, *gac*, *cag*, *acg*, где $a$, $c$ и $g$ — анод, катод и сетка триода соответственно. Первые пары букв обозначают здесь вход, а вторые — выход рассматриваемой цепи передачи.

Каждая из этих шести триодных цепей передачи может быть получена из другой посредством преобразований:

$$I = a \to a,\ b \to b,\ c \to c \quad (g, a) = g \to a \to g,$$

$$(g, c, a) = g \to c \to a \to g \quad (g, c) = g \to c \to g,$$

$$(g, a, c) = g \to a \to c \to g \quad (a, c) = a \to c \to a.$$

Совокупность этих преобразований является симметрической группой порядка 6. Триодная цепь передачи рассматривается как четырехполюсник, алгебраически описываемый (в реферируемой статье) матрицей проводимостей $\begin{bmatrix} y_{11} y_{12} \\ y_{21} y_{22} \end{bmatrix}$, имеющей для любого из шести различных способов использования триода следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 + \beta_1 \\ \alpha_2 + \beta_2 & \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

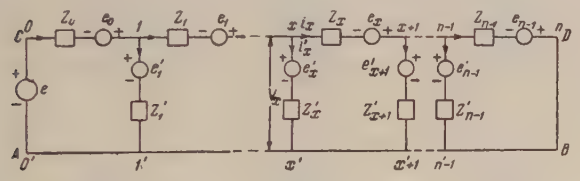
Отмечается, что элементы $\alpha_1$, $\alpha_2$, и $\alpha_3$ этой матрицы преобразуются совершенно так же, как и $g$, $c$ и $a$ соответственно, т. е.

$$I,\ (g,\ c,\ a),\ (g,\ a,\ c),\ (g,\ a),\ (g,\ c),\ (a,\ c),$$
$$I,\ (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3),\ (\alpha_1,\ \alpha_3,\ \alpha_2),\ (\alpha_1,\ \alpha_3),\ (\alpha_1,\ \alpha_2),\ (\alpha_3,\ \alpha_2).$$

Применение теории групп к триодным цепям передачи дает метод получения из конфигурации и электрических свойств нормального усилителя (*gca*) конфигурации и свойств любого другого способа использования триода. Приведен пример применения изложенного общего метода для вычисления коэффициента усиления напряжения и входной проводимости (адмиттанса) для триодной цепи передачи с обратной связью (для всех шести различных способов использования триода). *В. И. Шестаков*

**5286. Анализ электрической цепи методом разностного уравнения. Е Гай-юань** (Electric circuit analysis by the method of difference equation. Yeh Kai-yuan), Acta sci. sinica, 1953, 2, № 3, 179—186 (англ.)

Автор использует метод, описанный в работе Цзянь Вэй-цзана (Chien Wei-zang, Chinese I. Phys., 1953, 9, № 3, 170—180), для определения напряжений $v_x$ в электрической цепи, изображенной на фиг. 1.



К реф. 5286 Фиг. 1

Эта задача решается сначала для установившегося, а затем аналогичным методом для переходного режима. В последнем случае используется преобразование Лапласа

$$\mathfrak{L}[f(x)] = F(s).$$

Полагая

$$Z_x(s) = R_x + L_x s + \frac{1}{sC_x};\quad E_x(s) = \mathfrak{L}[e_x(t)] + L_x i_{0x} - \frac{c_{0x}}{s}\ (x = 0, 1, \ldots, n-1),$$

$$Z'_x(s) = R'_x + L'_x s + \frac{1}{sC'_x};\quad E'_x(s) = \mathfrak{L}[e'_x(t)] - L'_x i'_{0x} + \frac{c'_{0x}}{s}\ (x = 1, 2, \ldots, n-1),$$

$$\mathfrak{L}[v_x(t)] = V_x(s);\quad \mathfrak{L}[e(t)] = E(s),$$

где $i_{0x}$ и $e_{0x}$ — начальный ток и напряжение между узлами $x$ и $x+1$, а $i'_{0x}$ и $e'_{0x}$ — начальный ток и напряжение между узлами $x$ и $x'$ (см. фиг. 1), получаем уравнение

$$V_x(s) - p_x(s)\,V_{x-1}(s) - q_x(s)\,V_{x-2}(s) = E_x(s) \quad (x = 2, 3, \ldots, n),$$

где

$$p_x(s) = 1 + \frac{Z_{x-1}(s)}{Z'_{x-1}(s)} + \frac{Z_{x-1}(s)}{Z_{x-2}(s)},$$

$$q_x(s) = -\frac{Z_{x-1}(s)}{Z_{x-2}(s)},$$

$$E_x(s) \quad E_{x-1}(s) - \frac{Z_{x-1}(s)}{Z_{x-2}(s)} E_{x-2}(s) - \frac{Z_{x-1}(s)}{Z'_{x-1}(s)} E'_{x-1}(s).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$V_x(s) = P_0(s)\,\alpha_x(s) + Q_0(s)\,\beta_x(s) + \sum_{i-1}^{x} \frac{F_{i+1}(s)}{q_{i+1}(s)} \cdot \frac{\beta_i(s)\,\alpha_x(s) - \alpha_i(s)\,\beta_x(s)}{\alpha_{i-1}(s)\,\beta_i(s) - \alpha_i(s)\,\beta_{i-1}(s)},$$

где

$$P_0(s) = -\frac{1}{\alpha_n(s)}\left[E(s)\,\beta_n(s) + \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{i+1}(s)}{q_{i+1}(s)} \cdot \frac{\beta_i(s)\,\alpha_n(s) - \alpha_i(s)\,\beta_n(s)}{\alpha_{i-1}(s)\,\beta_i(s) - \alpha_i(s)\,\beta_{i-1}(s)}\right],$$

$$Q_0(s) = E(s),\quad \alpha_0(s) = 0,\quad \alpha_1(s) = 1,\quad \beta_0(s) = 1,\quad \beta_1(s) = 0,$$

$$\alpha_{x+2}(s) = p_{x+2}(s)\,\alpha_{x+1}(s) + q_{x+2}(s)\,\alpha_x(s),$$

$$\beta_{x+2}(s) = p_{x+2}(s)\,\beta_{x+1}(s) + q_{x+2}(s)\,\beta_x(s).$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получаем искомый результат:

$$v_x(t) = \mathfrak{L}^{-1}[V_x(s)].$$

Приведено несколько примеров, иллюстрирующих метод анализа для установившегося режима. Формулы для установившегося режима отличаются лишь тем, что вместо $V_x(s)$, $E(s)$, $E_x(s)$, $E'_x(s)$, $Z_x(s)$ и $Z'_x(s)$ в них содержатся величины $v_x$, $e$, $e_x$, $e'_x$, $Z_x$ и $Z'_x$ соответственно. *В. И. Шестаков*

**5287. Фильтры из элементарных звеньев. Освальд** (Filtres en échelle élémentaires. Oswald J.), Cables et transm., 1953, 7, № 4, 325—358 (франц.)

Исследование возможностей синтеза электрических фильтров по данным характеристикам фильтров. Применяются так называемые реактансы — некоторые рациональные функции комплексного переменного $P$, имеющего смысл на мнимой оси $P = j\omega/\omega_0$, где $j = \sqrt{-1}$ и $\omega/\omega_0$ — отношение переменной частоты $\omega$ синусоидального электрического тока к некоторой фиксированной частоте $\omega_0$. Кроме того, применяются некоторые иррациональные функции переменного $P$, имеющие нули, полюсы и точки разветвления на мнимой оси. Даны подробные таблицы фильтров, полученных изложенным в статье методом. *Н. А. Бразма*

**5288. Упрощения тензорного анализа цепей. Тузери** (Simplifications dans l'analyse tensorielle des réseaux. Thouzery J.), Radio Techn. Digest, 1953, 7, № 3, 145—161 (франц.)

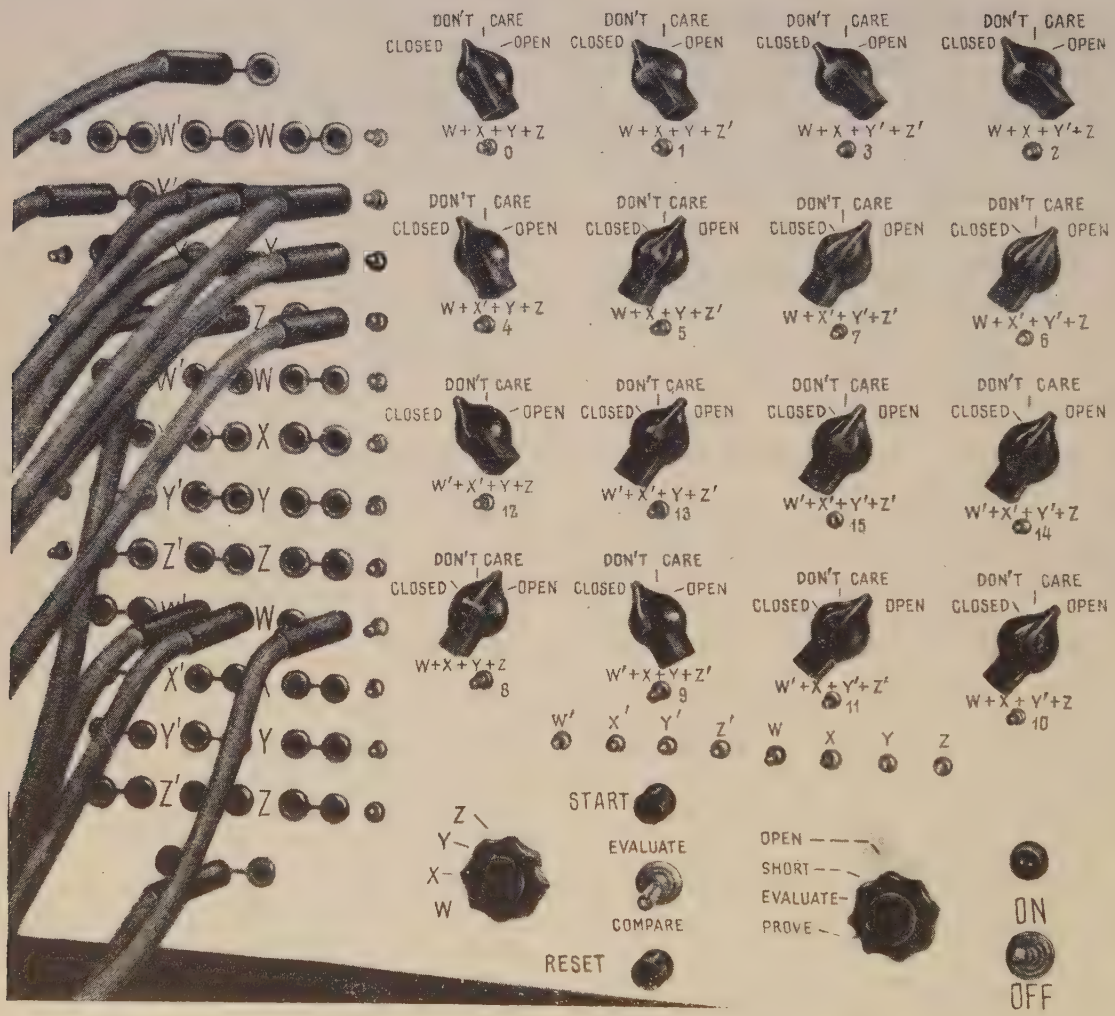
## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

**5289. Машина, облегчающая проектирование переключающих схем. Шеннон, Мур** (Machine aid for switching circuit design. Shannon Claude E., Moore Edward F.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 10, 1348—1351 (англ.)

Рассматривается проблема использования машин для облегчения и ускорения проектирования релейно-контактных схем.

Описывается машина, — релейный схемный анализатор,— созданная специально для этой цели, и обсуждается возможность использования быстродействующих универсальных вычислительных машин в проектировании релейно-контактных схем.

В качестве исходных данных анализатор должен иметь анализируемую схему, смонтированную на коммутационной штепсельной доске, и полное перечисление тех состояний реле $W, X, Y, Z$, при которых эта схема должна быть замкнута или разомкнута. Задания этих состояний осуществляются посредством установки всех 16 трехпозиционных переключателей релейного анализатора в положения, требуемые техническими условиями проектируемой схемы. Если из заданных технических условий следует, что проектируемая схема должна быть замкнута (разомкнута) при некотором данном состоянии реле $W, X, Y, Z$, то соответствующий этому состоянию переключатель должен быть установлен в крайнее левое (правое) положение. Например, если требуется, чтобы проектируемая схема была замкнута в случае, когда реле $W, X, Z$ сработали (т. е. якори этих реле притянуты), а реле $Y$ не сработало (т. е. якорь этого реле отпущен), то переключатель № 2, обозначен-



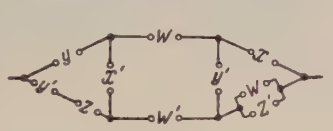

К реф. 5289

Фиг. 1

ный выражением $W + X + Y' + Z$, должен быть установлен, как и изображено на фиг. 1, в крайнем левом положении. Если же заданные технические условия не вполне определяют состояние проектируемой схемы при некоторых состояниях реле этой схемы, т. е. если при этих состояниях проектируемая схема может быть либо замкнута, либо разомкнута, то соответствующие этим состояниям трехпозиционные переключатели могут быть установлены в промежуточном (нейтральном) положении.

Релейный анализатор предназначен для схем, не содержащих обмоток реле и построенных лишь из контактов реле.

Согласно утверждению авторов, этот анализатор осуществляет следующие функции: 1) проверяет, соответствует ли анализируемая схема заданным техническим условиям; 2) делает систематические попытки упрощения этой схемы посредством удаления лишних контактов (закорачивая или размыкая их); 3) определяет минимальное число контактов (и типы этих контактов), необходимых по техническим условиям для проектирования схемы. О том, как действительно анализатор выполняет эти функции, трудно судить, так как в статье нет ни скелетной, ни принципиальной схем анализатора. Описана лишь лицевая сторона панелей, содержащая коммутационную доску, переключатели, управляющие анализатором и задающие технические условия проектируемой схемы, а также индикаторные неоновые лампочки. Приведено фото этой панели (фиг. 1) и указано, что анализатор содержит 24 реле, 14 германиевых диодов, 2 управляющих переключателя и 48 неоновых лампочек. Отмечается, что существуют схемы, для которых с помощью этого анализатора можно найти минимальное число контактов, но для доказательства того, что это число является действительно минимальным, анализатор оказывается непригодным. В качестве примера приведена мостиковая схема, изображенная на фиг. 2. Менее чем в 2 мин., как утверждают авторы, анализатор позволил обнаружить, что в этой схеме имеется один лишний контакт. Однако, когда главный переключатель (фиг. 1) установлен в положении «доказать» («prove»), а на штепсельной доске собрана схема фиг. 2, анализатор указывает только, что необходимо не менее восьми контактов, в то время как другими методами можно доказать, что минимальное число контактов для схем, эквивалентных данной, равно девяти.



Фиг. 2

К реф. 5289

В конце статьи авторы рассматривают возможность применения быстродействующих универсальных вычислительных машин для проектирования переключающих схем. Хотя электронные машины выполняют отдельные операции примерно в 10 000 раз быстрее, чем релейные, скорость решения задач по проектированию переключающих схем на электронных вычислительных машинах и на релейном анализаторе будет, как полагают авторы, примерно одинаковой. Это объясняется тем, что для символического описания анализируемой схемы, составления соответствующей программы и ввода в машину всех необходимых данных будет требоваться значительно больше времени, чем для непосредственного представления и анализа схемы на анализаторе. Кроме того, выполнению одной логической операции на релейном анализаторе будет соответствовать выполнение нескольких десятков команд на вычислительной машине.

Заканчивая сравнительную оценку этих двух методов решения проблем проектирования переключающих схем, авторы ставят вопрос о необходимости создания специальной машины, подходящей для решения широкого круга комбинаторных задач.

*В. П. Смирягин*

**5290. Эффективность работы и характеристики вычислительных машин Абердинского полигона.** Спенс (Operating efficiencies and characteristics of the computing machines at Aberdeen Proving Ground. Spence Homer W.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952 Sept., 1953, 73—77 (англ.)

Статья подводит первые итоги работы вычислительных машин, находящихся в эксплуатации в вычислительном отделе Баллистической лаборатории Абердинского полигона (Computing Laboratory of the Ballistic Research Laboratories at Aberdeen Proving Ground). Всего в эксплуатации находится 4 машины: ЭНИАК; релейная машина фирмы «Белл»; ЭДВАК (РЖМат, 1953, 476); с февраля 1952 г. начала действовать машина ОРДВАК (РЖМат, 1954, 1434, 3490). Приводимые данные по эксплуатации этих машин (табл. 1) относятся к периоду с января 1950 г. для первых двух из перечисленных машин и к периоду с апреля 1952 г. по июнь 1952 г. для последних двух.

*Таблица 1*

| Тип машины | Белл | ЭНИАК | ОРДВАК | ЭДВАК |
|---|---|---|---|---|
| Время на техническое обслуживание | 7,2% | 27,5% | 38,8% | 63% |
| Действительное машинное время | 50,2% | 72,5% | 61,2% | 37% |
| начальное время, контроль кодов | 1,1% | 17,5% | 24,2% | 24,6% |
| рабочее время | 49,1% | 55% | 14,6% | 10,6% |
| простой | — | — | 22,4% | 1,8% |
| Ночной перерыв в работе | 42,6% | — | — | — |

Время на техническое обслуживание включает в себя время, затраченное на исправление программ, обслуживание машин и их реконструкцию. Особо отмечается надежность и экономичность машины «Белл». Дается анализ основных неполадок для машины ЭНИАК: 90% времени технического обслуживания связано с выходом из строя ламп и 10% — с обрывом проводов, плохими пайками и неисправностями входных и выходных устройств. В жаркое время года отмечается значительный выход из строя электролитических конденсаторов, используемых в устройстве питания. Приводятся данные по составу обслуживающего персонала. Время простоя машин ОРДВАК и ЭДВАК состоит в основном из времени, отводимого для решения специальной контрольной задачи (Wheeler David J., Robertson

J. E., Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, 41, № 10, 1320—1325). В машине ОРДВАК один раз в день производится регулировка запоминающего устройства на трубках Вилльямса, требующая от 0,5 до 2 час. Для этих машин предполагается увеличить машинное время до 80%, в том числе рабочее — до 65% и более. Отмечается сложность машины ЭДВАК в обслуживании. В статье приводится сравнительная таблица (табл. 2) рабочих характеристик перечисленных выше машин. Дается краткий обзор запоминающих устройств, кодов, скорости работы, входных и выходных устройств. Приводятся следующие сведения по разрабатываемым усовершенствованиям к эксплуатирусмым машинам:

ЭДВАК — разрабатывается магнитное запоминающее устройство на барабане емкостью 10 000 ячеек с временем выборки 12 мсек. (РЖМат, 1954, 3093);

*Таблица 2*

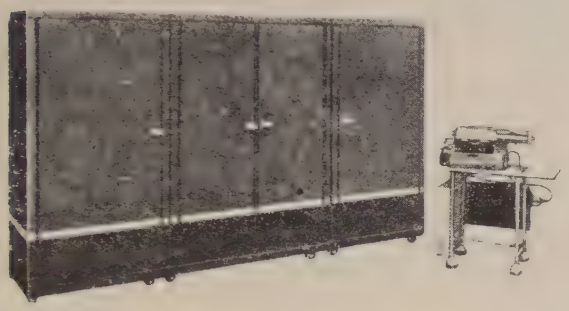
| | Белл | ЭНИАК | ОРДВАК | ЭДВАК |
|---|---|---|---|---|
| Тип машины | асинхронная<br>двоичная<br>параллельная | синхронная<br>десятичная<br>параллельная | асинхронная<br>двоичная<br>параллельная | синхронная<br>двоичная<br>последовательная |
| Система контроля | числа автоматически<br>команды частично автоматически | контрольная задача<br>контроль по разностям<br>программный контроль | контрольная задача<br>контроль по разностям<br>программный контроль | автоматический контроль чисел<br>неиспользуемые команды |
| Запоминающее устройство | | | | |
| а) внешнее | 6-дырочная телеграфная лента | перфокарты | 5-дырочная телеграфная лента и перфокарты | 5-дырочная телеграфная лента |
| б) внутреннее | релейные регистры | триггерные регистры | электростатическое | ртутные акустические линии задержки |
| в) емкость | 16 чисел | 20 чисел | 1024 числа | 1024 числа |
| Время выборки в мсек. | 5,0 | 0,1 | максимум 0,048<br>минимум 0,024 | максимум 0,364<br>минимум 0,048 |
| Время, затрачиваемое на операции, в мсек. | | | среднее 0,036 | среднее 0,206 |
| + | 300 | 0,60 | 0,06 | 0,85 |
| — | 300 | 1,0 | 0,06 | 0,85 |
| × | 1000 сред. | 3,4 | 0,75 сред. | 2,9 сред. |
| : | 2100 сред. | 24 сред. | 1,0 сред. | 2,9 сред. |
| $\sqrt{}$ | 4300 сред. | 24 сред. | 10,0 сред. | 40,0 |
| Код | | | | |
| а) тип | 3-адресный | одноадресный | одноадресный | 4-адресный |
| б) длина команды | переменная от 3 до 12 | 2 разряда | 19 разрядов | 44 разряда |
| в) число команд | 9 | 94 | 53 | 12 |
| г) система запятой | плавающая | фиксированная | фиксированная | фиксированная |
| Время ввода и вывода | | | | |
| а) ввод с ленты | 0, если время вычислений больше 3000 мсек. между соседними вводами;<br>3000, если меньше | — | 400 мсек/код | 20 мсек/код |
| б) ввод с карт | — | 300 мсек. | 1033 мсек. на 8 десятичных кодов<br>300 мсек. на 24 двоичных кода | в будущем 3000 мсек. на 8 десятичных кодов |
| в) печать на ленту | — | — | 200 мсек/код | 2000 мсек/код |
| г) вывод на перфокарты | 0, если время вычислений больше, чем 3000 мсек. между соседними выводами;<br>3000, если меньше | 200 мсек., если время вычислений больше, чем 600 между соседними выводами;<br>600, если меньше | 1333 мсек. на 8 десятичных кодов 600 мсек. на 24 двоичных кода | в будущем 600 на 8 десятичных кодов |
| Рулонный телетайп | 368 знаков/мин. | — | 368 знаков/мин | в будущем 900 строк/мин; каждая строка из 56 знаков |

ЭНИАК — разрабатывается статическое магнитное запоминающее устройство на 100 кодов и предполагается установка магнитного барабана (РЖМат, 1954, 2418).

Рассматривается вопрос оценки скорости работы вычислительной машины. Предлагается для грубого сравнения вести эту оценку по времени, затрачиваемому на одно умножение. Такая оценка ставит на первое место по скорости ОРДВАК, затем по порядку ЭДВАК, ЭНИАК и машину «Белл». *А. Б. Залкинд*

**5291. АЛЬВАК** (Announcing... ALWAC), Computers and Automation, 1953, **2**, № 9, 39 (англ.)

Сообщение фирмы «Лоджистикс Рисёрч» (Logistics Research, Inc.) о выпуске автоматической электронной вычислительной машины АЛЬВАК (ALWAC). АЛЬВАК является универсальной двоичной машиной последовательного действия с запоминающим устройством на магнитном барабане объемом



К реф. 5291

2048 чисел. Ввод и вывод на перфоленту или на телетайп. Приведен общий вид машины (см. фото). *Д. П.*

**5292. Дешевая электронная вычислительная машина для предприятий** (Low-cost electronic computer for business), Amer. Business, 1954, **24**, № 1, 42 (англ.)

См. реф. 5291. Указывается, что стоимость машины составляет около 50 000 долл.

**5293. Перевод с одного языка на другой при помощи машины. Отчет о первом успешном испытании. Макдоналд** (Language translation by machine — a report of the first successful trail. Macdonald Neil), Computers and Automation, 1954, **3**, № 2, 6—10 (англ.)

Сообщение о проведенной 7 января 1954 г. в конторе фирмы ИБМ в Нью-Йорке первой публичной демонстрации перевода с русского языка на английский при помощи электронной вычислительной машины ИБМ-701 (РЖМат, 1954, 1853—1856, 2375—2377, 2746, 4207). Для испытания был специально подготовлен словарь из 250 русских слов из области политики, юстиции, математики, химии, металлургии, связи и военного дела, записанных латинскими буквами. Слова были подобраны так, чтобы каждое из них имело один или два английских эквивалента. Приводится извлечение из словаря (табл. 1); в словарь включены, помимо частей речи, также падежные окончания. Для некоторых слов включены только корни, некоторые слова даны полностью, даже с личными окончаниями в случае глагола («определяет», «определяется») или во множественном числе («мысли»). В словаре указаны также для каждого слога три специальных кода, используемых для целей управления работой машины. Приведены 6 синтаксических правил, которые при помощи этих кодов обеспечивают правильный перевод. Эти правила таковы:

1. Перестановка. Если первый код данного слова есть 110, необходимо узнать каков третий код предыдущего полного слова. Если он равен 21, то надо изменить порядок этих слов (т. е. слово с кодом 21 должно следовать за словом с кодом 110); в противном случае порядок сохраняется. В обоих случаях для слова с кодом 110 берется I английский эквивалент.

2. Выбор по последующему тексту. Если первый код данного слова есть 121, необходимо узнать второй код следующего полного слова или части слова (корня или окончания). Если этот второй код равен 221, то для слова с кодом 121 надо взять I английский эквивалент; если второй код равен 222,— то II английский эквивалент. В обоих случаях порядок слов сохраняется.

*Таблица 1*

Извлечение из словаря

| Русские слова | Английский эквивалент | | Коды | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | I | II | I | II | III |
| к | to | for | 121 | *** | 23 |
| кислороди- | oxygen | *** | *** | *** | ** |
| лишени- | deprival | *** | *** | 222 | ** |
| материал- | material | *** | *** | *** | ** |
| мы | we | *** | *** | *** | 23 |
| мысли | thoughts | *** | *** | *** | ** |
| много- | many | *** | *** | *** | ** |
| медь | copper | *** | *** | *** | 21 |
| мест- | place | site | 151 | *** | 23 |
| механическ- | mechanical | *** | *** | 242 | ** |
| международн- | international | *** | *** | *** | ** |
| на | on | for | 121 | *** | 23 |
| нападени- | attack | attacks | 121 | *** | ** |
| наука | a science | *** | *** | 242 | ** |
| обработка | processing | *** | *** | *** | ** |
| объект | objective | objectives | 121 | *** | ** |
| офицер | an officer | the officer | *** | *** | ** |
| -ого | of | *** | 131 | *** | 23 |
| -ом*) | by | *** | 131 | *** | ** |
| определяет | determines | *** | *** | *** | ** |
| определяется | is determined | *** | *** | *** | ** |
| оптическ- | optical | *** | *** | *** | ** |
| орудие | gun | *** | *** | 241 | ** |
| отдел- | section | *** | *** | *** | ** |
| отделение | devision | squad | 121 | 242 | ** |
| отношение- | relation | the relation | 151 | *** | ** |

*) В тексте опечатка: — on *(прим. реф.)*

3. Выбор с перестановкой. Если первый код данного слова есть 131, а третий код предыдущего полного слова или части слова (корня или окончания) равен 23, то для слова с кодом 131 надо взять II английский эквивалент и сохранить порядок следования слов. В противном случае для слова с кодом 131 следует взять I английский эквивалент и изменить порядок следования на обратный

4. Выбор по предыдущему тексту. Если первый код данного слова есть 141, а второй код предыдущего полного слова или любой части (корня или окончания) предыдущего разделенного слова 241, то для данного слова берется I английский эквивалент; если же второй код равен 242, то берется II английский эквивалент. В обоих случаях сохраняется порядок слов.

5. Выбор с пропуском. Если первый код данного слова есть 151, а третий код следующего полного слова или любой части (корня или окончания) следующего разделенного слова равен 25, то для слова с кодом 151 берется II английский эквивалент; в противном случае берется I английский эквивалент. В обоих случаях порядок слов сохраняется.

6. Разделение. Если первый код данного слова есть ***, то для этого слова берется английский эквивалент I и сохраняется порядок по отношению к предыдущему слову.

В качестве примера применения этих правил приводится перевод предложения: «величина угла определяется отношением длины дуги к радиусу» (табл. 2). В таблице записаны выбранные из словаря слова и части слов, соответствующие заданной фразе, с указанием их английских эквивалентов, управляющих кодов и применяемых правил.

*Таблица 2*

| Русские слова | Английский эквивалент I | Английский эквивалент II | Коды I | Коды II | Коды I I | Какое правило применяется |
|---|---|---|---|---|---|---|
| величина | magnitude | | *** | *** | ** | 6 |
| угл- | coal | angle | 121 | *** | 25 | 2 |
| -а | of | | 131 | 222 | 25 | 3 |
| определяется | is determined | | *** | *** | ** | 6 |
| отношени- | relation | the relation | 151 | *** | ** | 5 |
| -ем | by | | 131 | *** | ** | 3 |
| длин- | length | | *** | *** | ** | 6 |
| -и*) | of | | 131 | *** | 25 | 3 |
| дуг- | arc | | *** | *** | ** | 6 |
| -и | of | | 131 | *** | 25 | 3 |
| к | to | for | 121 | *** | 23 | 2 |
| радиус- | radius | | *** | 221 | ** | 6 |
| -у | to | | 131 | *** | ** | 3 |

*) Окончания И и Ы не различаются *(прим. реф.)*

Формальное применение правил позволяет получить перевод: «Magnitude of angle is determined by the relation of lenght of arc to radius».

Указывается, что 6 перечисленных правил достаточно для перевода фраз, подобных тем, которые давались при испытании, вообще же правил такого типа, необходимых для перевода любого русского предложения на английский язык, должно быть около 100. Применявшийся словарь был сначала записан на перфокартах вместе с управляющими кодами, а затем введен в машину и перенесен на магнитный барабан, допускающий запись 6000 «слов» по 36 двоичных знаков. Для управления работой машины была разработана специальная программа, содержащая около 2400 команд; структурная схема программы приводится. Программа также была введена в машину. После этого предложения, подлежащие переводу, пробивались на перфокартах стандартным кодом ИБМ и вводились в машину. Через 5—8 сек. машина печатала на выходном устройстве перевод. Приводятся следующие примеры переводов (табл. 3).

*Таблица 3*

| Заданная для перевода русская фраза | Перевод, выполненный машиной |
|---|---|
| Качество угля определяется калорийностью | The quality of coal is determined by calory content. |
| Крахмал вырабатывается механическим путем из картофеля | Starch is produced by mechanical methods from potatoes. |
| Обработка повышает качество нефти | Processing improves the quality of crude oil. |
| Динамит приготовляется химическим процессом из нитроглицерина с применением инертных соединений | Dynamite is prepared by chemical process from nitroglycerine with admixture of inert compounds. |
| Международное понимание является важным фактором в решении политических вопросов | International understanding constitutes an import factor in decision of political questions. |

Указывается, что разработка конкретных вопросов машинного перевода велась в течение последних полутора лет Институтом языкознания Джорджтаунского университета и фирмой ИБМ. В конце статьи обсуждаются перспективы; указывается, что проведенные опыты являются лишь первым скромным шагом в решении проблемы. *Д. Ю. Панов*

5294. **Построение цифровой модели, работающей в истинном масштабе времени.** Грей (The organization of a digital real-time simulator. Gray Harry J., Jr), Conven. Rec. Inst. Radio Engrs, 1953, ч. 1, 85—88 (англ.)

Пенсильванским университетом (США) была проделана работа по исследованию возможности применения цифровых вычислительных машин в качестве моделей, работающих в истинном масштабе времени.

Исследования проводились для конкретной системы, описываемой тринадцатью нелинейными дифференциальными уравнениями 1-го порядка при допустимом шаге интегрирования по времени в 0,1 сек. Оказалось, что для машины типа «Райтеон-Ураган» (Raytheon-Hurricane), работающей на частоте 4 *Мгц*, время вычисления для этого шага интегрирования получалось не менее 0,22 сек.

Рассмотрение путей увеличения скорости привело к выводу, что машина для подобных целей должна быть последовательного действия, одноадресная, иметь отдельные запоминающие устройства для чисел и команд, иметь параллельные быстродействующие множительные и делительное устройства

и дополнительный регистр в арифметическом узле для сохранения в нем результата предыдущего действия.

Приводится таблица расчета времени для разных вариантов машин. Для 4-адресных машин, работающих на частоте 1 *Мгц* и не имеющих раздельного запоминания адресов и команд, быстродействующего множительного устройства и т. д., время, затрачиваемое на 1 шаг интегрирования для приведенной выше задачи, составляло бы не менее 0,237 сек. Для одноадресных машин, работающих на той же частоте и имеющих указанные выше улучшения, это время уменьшается до 0,04 сек. Машины, работающие на частоте 4 *Мгц*, будут иметь времена соответственно 0,059 сек. и 0,01 сек. Расчет времени для последовательных машин проводился для случая оптимального программирования (при минимальном времени выборки из последовательного запоминающего устройства). Приведены общие соображения по обеспечению работы с минимальным временем выборки за счет стандартизации длительности арифметических действий. *В. Д. Князев*

**5295. Электронный перевод** (Electronic translation, J. Franklin Inst., 1954, **257**, № 3, 257—260 (англ.)

Сообщение о демонстрации перевода с русского языка на английский при помощи машины ИБМ-701. Приводятся выдержки из доклада д-ра Леона Достерта (Leon Dostert) из Джорджтаунского университета, поясняющие принципы механизации перевода. Для иллюстрации применения 6 синтаксических правил (см. реф. 5293) приводятся следующие примеры:

1) Русское выражение «генерал-майор» по-английски должно быть переведено «major general». Это достигается приписыванием кода 21 к слову «генерал» и кода 110 к слову «майор». Тогда правило 1 (перестановка, см. реф. 5293) обеспечивает правильный перевод.

2) Русское выражение «наука о...» должно быть переведено по-английски словами «science of...». В словаре отдельно стоит слова «наука», имеющее один английский эквивалент «science», и слово «о», имеющее два английских эквивалента: «of» и «about». Для правильного перевода слово «наука» снабжается кодом 242, а слово «о» — кодом 141. Тогда правило 4 (выбор по предыдущему тексту, см. реф 5293) обеспечивает правильный перевод.

Отмечаются трудности работы по механизации перевода и указывается, что начинать необходимо с отдельных словарей для каждой технической области. Лишь после накопления достаточного опыта можно приступать к переводу обыденной речи с ее алогизмами и неожиданными словами. В качестве примера приводится слово «charleyhorse», которое «означает не лошадь (horse) по имени Чарли (Charley), а судорогу в икре ноги».

Указывается, что даже для перевода простейших фраз требуется программа, содержащая в $2^1/_2$ раза больше команд, чем программа, необходимая для моделирования движения управляемого снаряда. *Д. Ю. Панов*

**5296. Электронная вычислительная машина переводит русские предложения на английский язык** (Electronic «brain» translates russian sentences into english), Popul. Mech. Mag., 1954, **101**, № 3, 107 (англ.)

Краткое сообщение об опытах перевода с русского языка на английский в Джорджтаунском университете при помощи стандартной электронной вычислительной машины ИБМ (см. реф. 5293). Приведены фотографии пульта управления машины и

К реф. 5296

выходного устройства, печатающего перевод (см. фото), а также перфокарты, служащей для ввода предложения в машину.

**5297. Электронная вычислительная машина переводит с русского языка** (Electronic brain translates russian), Chem. and Engng News, 1954, **32**, № 4, 340—341 (англ.)

См. реф. 5293, 5295.

**5298. Вычислительная машина переводит с русского языка на английский** (Computer translates russian into english), Tele-Tech, 1954, **13**, № 2, 13 (англ.)

Краткая заметка.

См. реф. 5293, 5295.

**5299. Электронная вычислительная машина переводит** (Elektron-hjärna översätter), Tekn. alla, 1954, **15**, № 3, 10 (швед.)

Краткая заметка.

См. реф. 5293, 5295.

**5300. Гигантская вычислительная машина, приспособленная для проблем лингвистики: машина для перевода с одного языка на другой. Р и н д** (Une calculatrice géante adaptée aux problèmes de linguistique: la machine à traduire. Rind René), Atomes, 1954, **9**, № 96, 90—91 (франц.)

**5301. Перевод с одного языка на другой при помощи электронной вычислительной машины** (Language translation by electronic «brain»), Sci. News Letter, 1954, **65**, № 4, 59 (англ.)

Краткая заметка о трудностях, связанных с машинным переводом. Указывается, что прежде чем перевод с помощью электронной вычислительной машины будет иметь хоть какое-нибудь практическое значение, нужно создать устройство, которое автоматически «читало» бы печатный текст. Отмечается, что хотя известно, как следует строить программу для перевода при помощи машины, еще пройдет много времени, прежде чем машина сможет заменить переводчика. Главная трудность в том, что многие

слова имеют два или более значений, а грамматическая структура предложений очень разнообразна.

Указывается, что Хаски (Harry Haskey) еще за два года до демонстрации перевода с русского на английский Достертом (см. реф 5293, 5295) проводил аналогичные эксперименты по переводу с немецкого языка на английский при помощи машины СВАК (SWAC). *Д. П.*

**5302. Барьеры языка** (Language barriers), S. Afric. Industr. Chemist, 1953, **7**, № 6, 101 (англ.)

Краткая статья по поводу использования вычислительных машин для переводов с иностранных языков, в том числе «таких экзотических, как русский».

См. реф. 5293, 5295. *А. С. Есенин-Вольпин*

**5303. Управление электронной вычислительной машиной по телеграфу** (Electronic computer operated by long-line remote control), Electr. Engng, 1953, **72**, № 11, 1044 (англ.)

Сообщение об управлении электронной вычислительной машиной фирмы «Берроус» (Burroughs Corp.) по телеграфу. Исходные данные передавались в машину, находящуюся в Филадельфии, из университета Вэйн (Wayne) в Дейтроте на расстояние в 800 *км*. Результат подобным же образом передавался обратно. Такая работа машины осуществлялась при прохождении студентами университета специального двухнедельного курса цифровых счетных машин. Университет покупает у фирмы эту машину, и сейчас она устанавливается в Дейтройте.

*Л. В. Кутуков*

**5304. Прогресс в электронных цифровых вычислительных машинах. Орфорд** (Progress in electronic digital computers. Orford R. C.), Sci. News, 1953, № 30, 69—88 (англ.)

Дается общий обзор развития техники цифровых вычислительных машин за последние 5 лет. После кратких упоминаний о решении некоторых практических задач с помощью цифровых вычислительных машин описываются, в популярном изложении, методика выполнения операций в двоичной системе счисления и общие принципы построения схем цифровых вычислительных машин.

Значительная часть статьи посвящена рассмотрению различных видов запоминающих устройств, принципов их работы и возможности применения того или иного вида запоминающего устройства в зависимости от конкретных требований (скорость работы, большая емкость, время выборки данных).

Дается описание электростатического запоминающего устройства на катодолучевых трубках, запоминающего устройства на акустических и магнитострикционных линиях задержки (РЖМат, 1953, 944), запоминающего устройства с магнитной лентой и магнитным барабаном. Указывается, что магнитострикционная линия с никелевой лентой дает задержку 5,27 *мсек.* на дюйм при температуре 60°.

В качестве элемента машин, работающих в десятичной системе счисления, описывается газонаполненная лампа с холодным катодом, имеющая десять анодно-катодных промежутков, причем условия зажигания разряда таковы, что он может существовать только в одном из десяти промежутков. Используемые на практике лампы имеют индивидуальные внешние выводы от промежутков, что позволяет их использовать как счетчик или как запоминающее устройство (при частоте повторения импульсов 20 *кгц*).

В заключение коротко рассматриваются общие принципы построения схем арифметических устройств и приводится фотография электронной вычислительной машины ЭДСАК (РЖМат, 1953, 1429), построенной в математической лаборатории Кембриджского университета (Англия). Эта машина снабжена запоминающим устройством на акустических линиях задержки и работает со скоростью 40 000 элементарных арифметических операций в 1 мин. *Г. И. Танетов*

**5305. Машина АКЕ** (The A. C. E. machine), Electr. J., 1953, **151**, № 12, 879 (англ.)

Резюме сообщения английской Национальной физической лаборатории (NPL) о возможности использования вычислительной машины АКЕ (РЖМат, 1954, 4206) для исследования флаттера самолета при больших скоростях полета.

Резюме сообщения фирмы «Отоматик Телефон энд Электрик» (Automatic Telephone and Electric Co., Ltd.) о возможности замены современных электромеханических АТС системой, использующей электронику, что существенно ускоряет коммутацию. Разработано экспериментальное устройство, в котором все переключения выполняются посредством электронных клапанов, использующих лампы с холодным катодом. *А. Б. Залкинд*

**5306. Новые счетные машины. Корпут** (Moderne rekenmachines. Corput J. G. van der), Simon Stevin, 1951/52, **29**, № 4, 203—228 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (голл.)

Речь, произнесенная в Амстердамском университете 18 октября 1952 г. Излагаются общие сведения о современных счетных машинах, их типах, принципах работы, элементах. Освещается роль двоичной системы счисления, даются краткие сведения по истории. Указывается, что в Амстердаме в 1946 г. создан Математический центр, имеющий вычислительный отдел, который принимает вычислительные работы и занимается проектированием и постройкой релейной вычислительной машины APPA (ARRA — Automatische Relais Rekenmachine Amsterdam) под руководством проф. Вейнгардена (v. Wijngaarden). *Д. П.*

**5307. Магнитный усилитель в качестве элемента моделирующего устройства. Крейг** (The magnetic amplifier as an analog computer component. Craig Leonard J.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 10, 1477—1482 (англ.)

Рассматривается магнитный усилитель (м. у.) с параллельным соединением обмоток переменного тока и идеализированной кривой намагничивания металла магнитопроводов в виде ломаной, близкой к прямоугольной. При питании м. у. переменным напряжением с прямоугольной формой волны в его нагрузочном сопротивлении создаются знакопеременные импульсы, длительность которых линейно зависит от величины постоянного тока в управляющей обмотке. Приводятся методика и результаты испытаний м. у. с магнитопроводами из супермаллоя при частотах 400 *гц*. Измерение длительности импульсов на выходе производилось в долях полупериода напряжения питания с точностью 0,12%. Линейная зависимость между длиной импульса и током управления м. у. сохраняется в пределах

точности измерений в диапазоне от 0 до 80—89 % от наибольшей длины импульса, равной полупериоду напряжения питания, с уменьшением этого диапазона до 63% при очень низких температурах (—43°).

Два м. у., включенные параллельно на общий источник питания, образуют схему линейного модулятора положения и длительности импульсов. Каждый из м. у. этой схемы имеет две управляющие обмотки, включенные попарно последовательно. Ток первой обмотки управляет длительностью импульсов, а ток второй—их положением. Выходом служит разность падений напряжения в нагрузках м. у.

Описанный модулятор может служить основой схемы преобразования непрерывных величин в дискретные.

М. у., снабженный добавочной обмоткой на одном из магнитопроводов, образует схему линейного сдвига фазы питающих прямоугольных импульсов в зависимости от управляющего тока. Из сочетания последней схемы с модулятором прямоугольных импульсов получается схема перемножения двух непрерывных величин. Макет такого множительного устройства, изготовленный из элементов невысокой точности, дал погрешность в пределах 3%.

Применение дельтамакса в качестве материала для магнитопроводов м. у. дает значительно худшие результаты. *Н. Н. Ленов*

**5308. Электронное моделирующее устройство имитирует физические системы** (Analog computer simulates physical systems electronically), Petrol. Process., 1953, 8, № 8, 1242 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 4219.

**5309. Коллоквиум по вычислительным устройствам. Фромме, Пёш** (Kolloquium über Rechenanlagen. Fromme W., Pösch H.), Internat. math. Nachr., 1953, 7, № 27/28, 11 (нем.)

Краткое сообщение о коллоквиуме по вычислительным устройствам, состоявшемся в Гёттингене в марте 1953 г., на котором было прочитано и обсуждено 24 доклада по различным вопросам, связанным с конструкцией и практическим применением счетных устройств. Приведены следующие темы докладов: Вальтер, Пилоти, Пилоти, Биллинг (A. Walther, H. Piloty, R. Piloty, H. Billing), Обзор развития вычислительных установок в трех центрах Западной Германии; Бирман, Шлютер, Хёрнер (L. Biermann, A. Schlüter, S. v. Hoerner), Применение машин для решения математических и физических задач; Детмар (H. K. Dettmar), Построение специализированной машины для многомерного анализа Фурье; Рутизхаузер (H. Rutishauser), Автоматическое приготовление программ. *Н. Б.*

**5310. Список организаций, изготовляющих элементы вычислительных машин** (Roster of organizations making components), Computers and Automation, 1953, 2, № 6, 16 (англ.)

Список организаций, изготовляющих специальные элементы вычислительных машин, оборудования для обработки данных или для автоматического управления, но не изготовляющих целых машин или устройств управления. В списке, по состоянию на 10 августа 1953 г., перечислены 4 организации.

**5311. Список организаций, изготовляющих элементы вычислительных машин** (Roster of organizations making components), Computers and Automation, 1953, 2, № 7, 12 (англ.)

См. реф. 5310. По состоянию на 10 сентября 1953 г. перечислено 8 организаций.

**5312. Список организаций, изготовляющих элементы вычислительных машин** (Roster of organizations making components), Computers and Automation, 1953, 2, № 8, 22 (англ.)

См. реф. 5310, 5311. По состоянию на 10 октября 1953 г. перечислено 7 организаций.

**5313. Свойства и применения материалов: дельтамакса, 4-79 Мо-пермаллоя и супермаллоя** (Properties and applications of deltamax — 4-79 Mo-permalloy—supermalloy), Electronics, 1953, 26, № 6A, 180—181 (англ.)

Даются характеристики и основные данные железо-никелевых сплавов: дельтамакс, 4-79 Мо-пермаллой и супермаллой (см. таблицу). Эти сплавы, прокатанные в виде тонких и сверхтонких лент (толщиной от 0,003 до 0,05 *мм*), в настоящее время широко применяются в самых разнообразных элементах устройств автоматики, телемеханики, телеуправления, автоматического регулирования и в вычислительных устройствах.

Необходимость в весьма тонком прокате лент из железо-никелевых сплавов определяется желанием иметь малые потери на вихревые токи при работе на частотах до 20—50 *кгц*. Вследствие того, что

| | Дельтамакс | 4-79 Мо-пермаллой | Супермаллой |
|---|---|---|---|
| Удельный вес . . | 8,25 | 8,74 | 8,77 |
| Электрическое сопротивление | 45 | 55 | 65 |
| Температура при термообработке | 1075° | 1100° | 1200° |
| Начальная магнитная проницаемость (при 100 герц) . . . . | 400 1700 | 10000 40000 | 55000 120000 |
| Максимальная магнитная проницаемость (на пост. токе) . . | 100000 250000 | 70000 250000 | 300000 900000 |
| Максимальная магнитная проницаемость (при 60 герц) . | 40000 100000 | 40000 100000 | 100000 500000 |
| Максимальная индукция (при 60 герц) . | 13500 15500 | 7000 8000 | 6800 7800 |
| Остаточная индукция (при $B_{макс}$ = =6500,60 герц) . | 13000 15000 | 4000 5500 | 4000 5500 |
| Коэрцитивная сила (на пост. токе) . . . . . | 0,04 0,16 | 0,03 0,09 | 0,003 0,009 |
| Коэрцитивная сила (при $B_{макс}$ = =6500,60герц) . | 0,20 0,40 | 0,05 0,15 | 0,020,06 |

Величины измерены при насыщении материала.

технология проката тонких и сверхтонких металлических лент сложна, сердечники из указанных ленточных материалов получаются довольно дорогими, что является основным недостатком при использовании таких материалов. К достоинствам устройств с сердечниками из ленточных тонкокатанных магнитных материалов по сравнению с устройствами на электронных лампах можно отнести надежность работы и малые требования с точки зрения ухода и квалификации обслуживающего персонала.

Для изготовления сердечников, используемых в элементах вычислительных устройств, чаще всего требуется прямоугольная форма гистерезисной петли материала сердечника, т. е. отношение $\frac{B_{ост}}{B_{макс}}$ должно быть близким к единице. Таким свойством обладает сплав дельтамакс. Сплавы 4-79 Мо-пермаллой и супермаллой применяются для изготовления сердечников импульсных трансформаторов, трансформаторов тока и некоторых типов высококачественных низкочастотных трансформаторов.

Так как свойства сердечников, изготовленных из указанных ленточных материалов, изменяются при деформации этих сердечников, то в продажу они поступают запрессованными в пластмассу.

Приводятся кривые намагничивания и гистерезисные петли дельтамакса, 4-79 Мо-пермаллоя и супермаллоя, таблица их основных свойств и кривые влияния толщины ленты на величину начальной магнитной проницаемости в зависимости от частоты. Даются таблицы размеров сердечников, изготовляемых из трех указанных сплавов фирмой «Арнолд Энджиниринг» (The Arnold Engineering Co.). Наименьший сердечник вместе с пластмассовой оболочкой имеет наружный диаметр 15 *мм*, внутренний 11 *мм*, высоту 4,82 *мм*. *В. С. Бородин*

**5314. Различение направлений намагничивания магнитных сердечников** (Sensing of magnetic cores), Technol.Rev., 1953, 55, № 8, 418 (англ.)

Кратко сообщается о новом способе различения направления намагничивания ферромагнитного сердечника, имеющего прямоугольную гистерезисную петлю.

Предыдущие способы различения одного из двух направлений намагничивания ферромагнитного сердечника использовали перемагничивание этого сердечника, что уничтожало то магнитное состояние, которое ранее имел сердечник. Предлагается способ, при котором перемагничивания сердечника не происходит. В сердечнике создается от специальной обмотки дополнительный магнитный поток, сдвинутый пространственно относительно основного на 90°. Оба потока воздействуют на индикаторную обмотку таким образом, что на концах этой обмотки при установлении дополнительного потока возникают импульсы напряжения той или иной полярности, в зависимости от направления основного потока. При этом магнитное состояние сердечника практически не меняется. Приводится схема сердечника с обмотками. *В. С. Бородин*

**5315. Магнитное быстродействующее записывающее устройство** (Magnetic transient recorder), Radio and Telev. News, Radio-Electr. Engng Sec., 1953, 49, № 6, 27 (англ.)

Сообщение фирмы «Магне-Палс» (Magne-Pulse Corp.) о выпуске магнитного быстродействующего записывающего прибора (тип 103), предназначенного для записи одиночных импульсов и колебаний произвольной формы с полосой частот 0—30 *кгц*. Указано на возможность применения прибора в медицине, радиолокации, атомной физике, а также в вычислительной технике. Приведено фото. *В. В. Бардиж*

**5316. Устройство для магнитной записи** (The digital magnetic-tape handler), Electronics, 1953, 26, № 7, 330 (англ.)

Сообщение фирмы «Поттер» (Potter Instrument Co.) о выпуске нового устройства для записи на магнитной ленте типа 901А и 901Б, которое может работать совместно с цифровым вычислительным устройством или использоваться для записи данных в системах телеизмерения и т. д.

Модель 901А предназначена для работы с лентой шириной 1,25 *см*, 901Б — с лентой 0,63 *см* и соответственно с числом дорожек 6 и 2.

Для намотки пленки используются катушки диаметром 28 *см*, емкость которых 720 *м* каждая. Магнитная пленка может иметь 2 скорости: 38 и 76 *см/сек*. Время пуска (останова) движения ленты 5 *м/сек*. Устройство имеет ручное управление с панели и автоматическое управление от положительных импульсов величиной в 15 *в*.

К устройству может придаваться следующее электронное оборудование: усилители считывания и записи, электронные счетчики и регистр для сдвигов. *Я. А. Хетагуров*

**5317. Устройство для записи на магнитную ленту** (Magnetic tape handler), Instruments, 1953, 26, № 7, 982, 984 (англ.)

См. реф. 5316.

Устройство снабжено фотоэлектрическим приспособлением, управляющим натяжением ленты при различных скоростях движения, что предохраняет ее от разрывов. *Я. А. Хетагуров*

**5318. Цифровой самописец** (Digital recorder), Rev. Scient. Instrum., 1953, 24, № 8, 712 (англ.)

Сообщение фирмы «Поттер» (Potter Instrument Co., Inc.) о выпуске цифрового самописца типа 960, записывающего показания электронных счетчиков и других устройств, в которых записываемое число должно представляться в двоичнодесятичном коде. Каждая цифра записывается 4 специальными перьями на электрочувствительной бумаге «Теледельтос» (Teledeltos). Стандартные самописцы предназначены для записи не больше, чем 8-значных чисел (32 пера), но выпускаются самописцы и на 32-значное число. Продвижение бумаги может производиться либо по поступлении новых данных, либо непрерывно со скоростью от 7,5 *см/сек* до 50 *см/сек*. На одном рулоне можно записать до 50 тыс. чисел. Прибор потребляет мощность 300 *вт*. *Н. Я. Матюхин*

**5319. Цифровой самописец** (Digital recorder), Mach. Design, 1953, 25, № 7, 232 (англ.)

См. реф. 5318.

**5320. Двоичный счетчик** (Binary counter), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, 41, № 9, 116A, 118A (англ.)

Сообщение фирмы «Лаборатори фор Электроникс» (Laboratory for Electronics, Inc.) о выпуске модели «1001» девятиразрядного двоичного счетчика на магнитных элементах, работающего на частоте до 50 *кгц*. Счетчик смонтирован в блоке, имеющем размеры 20 × 5 × 5 *см*. Счетчик мало чувствителен к колебаниям питающего напряжения и в сочетании с блоками другого типа может использоваться для выполнения сложения, умножения, деления. Сообщается также о выпуске блока клапанов (модель «1002») и отдельного блока синхронизации непериодических импульсов, работающего на частотах до 50 *кгц*. Приводится фотография счетчика. *Л. С. Легезо*

**5321. Магнитное двоичное вычислительное устройство блочной конструкции** (Magnetic binary-counter plug-in assembly), Instruments, 1953, 26, № 9, 1323 (англ.)

См. реф. 5320.

**5322. Магнитный счетчик импульсов** (Magnetic impulse counter), Radio and Telev. News, 1953, 49, № 5, 23 (англ.)

Сообщение фирмы «Келлог Суитчборд энд Суплай» (Kellogg Switchboard and Supply Co.) о выпуске специального двухобмоточного реле, имеющего 10 отдельных якорей с соответствующими контактами, срабатывающих последовательно по мере поступления импульсов в обмотки и применяемого в десятичных счетчиках. *В. С. Бородин*

**5323. Магнитные элементы для вычислительной техники** (Magnetic decision elements), Tele-Tech, 1953, 12, № 8, 118 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 3887.

**5324. Запоминание в машинах. Сейдж** (Making machines remember. Sage Ira M.), Prod. engng, 1953, 24, № 4, 141—149, 274 (англ.)

Излагаются в популярной форме принципы работы запоминающих устройств, применяемых в технике. Кратко описаны следующие виды запоминающих устройств: акустические—на ртутных линиях задержки и на линиях из металлических сплавов; диэлектрические — на простых конденсаторах; электромеханические — работающие по принципу грамзаписи и на обычных реле; электронные — на триггерах, диодах и на электроннолучевых трубках; ферроэлектрические — на кристаллах титаната бария; феррорезонансные — на цепях *LCR* с нелинейной индуктивностью; магнитные — на барабане, ленте, проволоке, диске, ферритовых сердечниках; механические — на перфолентах, счетчиках; оптические — на барабане, покрытом фосфором. Приводятся наглядные блок-схемы и эскизы запоминающих устройств. Дается их сравнительная характеристика. В частности, дано описание магнитного барабана с никелевым покрытием емкостью 163840 двоичных цифр. Чтение и запись производятся различными магнитными головками (даны фото головок). Приводится характеристика намагничивания нового магнитного материала дельтамакса (см. реф. 5313). Дана обширная библиография. *Л. С. Легезо*

**5325. Холод для элементов вычислительных устройств** (Cool head for electronic brains), Current Sci. and Aviat., 1953, 39, № 2, 13 (англ.)

Электронные вычислительные устройства для работ по управляемым снарядам, ведущихся фирмой «Норт Американ Авиэйшн» (North American Aviation Co.), проходят суровые температурные испытания. Приведена фотография, на которой вычислительное устройство покрыто слоем льда.

**5326. Новые возможности. Диэлектрические усилители** (New horizons. Dielectric amplifiers), Tele-Tech, 1953, 12, № 7, 31 (англ.)

Разработаны диэлектрические усилители из ферроэлектрика размерами 0,8 $см^2$ × 0,18 *см*. Подобные усилители будут, вероятно, применяться в установках для военных и промышленных целей, так как срок службы у них неограничен. Работы в этой области ведутся фирмами «Дженерал Электрик», «Белл», «Гленко» (Glenko Co.), «Радиэйшен» (Radiation Inc.), Массачусетским институтом и институтом Карнеджи (Carnegie Inst.). *Н. Я. Матюхин*

**5327. Германиевые фотоэлементы и германиевые силовые выпрямители с поверхностным контактом** (Germanium junction photo electric cells and germanium junction power rectifiers), Instrum. Practice, 1953, 7, № 12, 1004 (англ.)

Краткое сообщение английской фирмы «Стандарт Телефонс энд Кейблс» (Standard Telephones and Cables Ltd.) о разработке германиевого фотоэлемента и германиевого силового выпрямителя. Приведены следующие данные: фотоэлемент (размером 6,5 × × 9,5 *мм*) способен воздействовать непосредственно на реле, не требуя усилителя; силовой выпрямитель по габаритам в 4 раза меньше соответствующего ему металлического выпрямителя; коэффициент полезного действия выпрямителя составляет 99%.

В качестве одного из возможных применений фотоэлемента указывается устройство ввода для электронных счетных машин.

**5328. Диоды с поверхностным контактом** (Junction diodes), Proc. Engrs, 1953, 41, № 9, 145A (англ.)

Фирма «Нсйшнл Юнион Радио» (National Union Radio Corp.) объявляет о предстоящем выпуске серии диодов «Union» с поверхностным контактом малой площади. Приведена фотография. Имеется ссылка на бюллетень № 1002.

**5329. Точечно-контактные полупроводниковые триоды для быстродействующих вычислительных машин** (Point contact transistors for high-speed computers), Computers and Automation, 1953, 2, № 5, 35 (англ.)

Рекламное сообщение фирмы «Транзистор Продуктс» (Transistor Products, Inc.) о германиевых точечно-контактных триодах типа 2F и 2G для частоты 5 *Мгц* и 10 *Мгц* соответственно. Приведена фотография триода и кривые изменения коэффициента усиления тока с возрастанием частоты для триодов обоих типов.

**5330. Полупроводниковые триоды с поверхностным контактом** (Junction transistors), Instruments, 1953, 26, № 9, 1352 (англ.)

Краткое сообщение фирмы «Техас Инструментс» (Texas Instruments, Inc.) о новых полупроводниковых $n — p — n$ триодах типов 200 и 201, изготовляемых путем наращивания кристалла. Триоды выполняются со стеклянно-металлической герме-

тической запайкой и предназначаются для усиления звуковых частот. Два типа триодов различаются по сопротивлению коллектора и коэффициенту усиления тока (тип 200 имеет коэффициент усиления тока 0,9, а тип 201 — 0,95). Рабочая температура триодов до 50°.

**5331. Полупроводниковые триоды** (Transistors), Electr. Manufact., 1953, **52**, № 1, 170 (англ.)

Сообщение фирмы «Вестингауз» (Westinghouse) о выпуске точечно-контактного полупроводникового триода типа WX-3347 и триода с $p — n — p$ переходом типа WX-4813.

Приведены следующие данные относительно типовых рабочих характеристик этих триодов. Триод WX-3347, работая в режиме усилителя малых сигналов в схеме с заземленным основным электродом, при токе коллектора от 2 *ма* до 3 *ма* имеет коэффициент усиления мощности 18 *дб*; предельная частота этого триода составляет 2 *Мгц*.

Триод WX-4813, работая в качестве усилителя в схеме с заземленным эмиттером и входом на основной электрод, при токе коллектора от 1 *ма* до 2 *ма* имеет коэффициент усиления мощности 30 *дб*.

Триоды предназначены для применения в разработках усилителей, генераторов и коммутационных схем.

Дана фотография. *Н. И. Бродович*

**5332. Улучшенные полупроводниковые триоды** (Better transistors), Mill and Factory, 1953, **53**, № 3, 310, 312, 316 (англ.)

Краткая заметка относительно работ фирмы «Дюпон» (Du Pont) в области получения чистого кремния для полупроводниковых триодов. Отмечается, что применение кремния в качестве полупроводника позволит создать более мощное электронное оборудование, способное работать при повышенных температурах и обладающее, повидимому, большей точностью. *Н. Б.*

См. также РЖМат, 1954, 2434.

**5333. Производство германиевых триодов** (Germanium triode production), Electronic Engng, 1953, **25**, № 307, 385 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 3901—3905.

**5334. Автоматическая сборка печатной аппаратуры. Геролд** (Printed-circuit assemblies by automatic-machine systems. Gerhold R. A.), Electr. Manufact., 1953, **51**, № 3, 106—111 (англ.)

Приводятся результаты работ, проведенных в Лабораториях войск связи США в области создания машины для автоматической сборки аппаратуры.

Предлагается проект автоматической сборочной линии. Линия должна состоять из трех основных машин: 1) машины для приготовления деталей, 2) машины для транспортировки деталей и 3) машины для автоматической сборки. Машина, заготовляющая детали, должна автоматически производить электрические испытания и отбраковку деталей и формовать подводящие проводники. Машина для транспортировки переносит детали в сборочную машину. Правильность поступления деталей контролируется при помощи цифрового кода, которым кодируются детали. Сборочная машина должна разместить полученные детали надлежащим образом на предварительно заготовленных платах с нанесенным рисунком схемы и перфорированными отверстиями и затем произвести пайку. Должна быть предусмотрена возможность варьирования величины плат от 25 × × 25 до 300 × 300 *мм*; размещение деталей должно выдерживаться с точностью до 0,13 *мм*. Монтаж деталей будет происходить со скоростью 30 штук в 1 мин. Замена плат будет занимать время не более 10 сек. Таким образом машина сможет выпускать 32 блока (имеющих 50 деталей) в 1 час, или 750 в 1 сутки. Если в блоке содержится 10 деталей, машина может выпускать их в количестве 20 штук в 1 час, или почти 2900 штук в 1 сутки. Контроль за работой машины может производиться при помощи перфокарт. Переход с выпуска одного типа оборудования на другой требует только замены соответствующих перфокарт, управляющих работой линии, и деталей и занимает очень немного времени.

В статье приведены схемы линии, фотографии блоков, собранных по способу автоматической сборки (в частности блоков, разработанных Национальным бюро стандартов США; см. РЖМат, 1954, 2411). Приведена библиография. *Л. В. Кутуков*

**5335. Экономика «печатного» монтажа. Суиггетт, Карберри** (The economics of printed wiring. Swiggett Róbert L., Carberry James F.), Tele-Tech, 1953, **12**, № 12, 78—81, 177—178 (англ.)

Сравнивается относительная стоимость радиоаппаратуры, изготовленной обычными методами и способом печатания (рассматриваются только два способа—травления и электролитического покрытия).

Производится ориентировочный подсчет стоимости подготовки оборудования к выпуску типовой аппаратуры 4-лампового супергетеродинного приемника, линейки усилителя промежуточной частоты телевизионного приемника, блоков для электронных вычислительных машин, различной испытательной аппаратуры и др. Доказывается, что в ряде случаев даже при мелкосерийном выпуске стоимость аппаратуры, изготовленной способом печати, значительно ниже стоимости аппаратуры, изготовляемой обычным способом. Указывается, что печатные схемы открывают путь к полной автоматизации процесса изготовления радиоаппаратуры. *Л. В. Кутуков*

**5336. Автоматическая система сборки электронной аппаратуры** (Robot electronic system), Sci. News Letter, 1953, **64**, № 14, 211, обложка (англ.)

Описывается автоматическая линия «Тинкертой» (Project Tinkertoy) для изготовления радиоаппаратуры, предназначенная в основном для выпуска военной продукции.

Сборка ведется на автоматических станках и основана на использовании керамических плат стандартных размеров и формы. На платах укрепляются детали; монтаж производится способом печатания, сопротивления наклеиваются. Керамические платы собираются в узлы, из которых собирается аппаратура. Управление процессом производится при помощи перфокарт. Специально отмечается гибкость настройки линии, которая легко может быть переключена на выпуск нового изделия; отмечается важность этого обстоятельства в военное время. Приведено фото собранного узла. *Л. В. Кутуков*

**5337. Лабораторный способ изготовления печатных схем. Брумхал** (Printed circuit techniques for the laboratory. Broomhall Gordon E.), Tele-Tech, 1953, 12, № 7, 36—38, 111 (англ.)

Подробное описание фотохимического способа изготовления печатных схем (фототравления) в лабораторных условиях. Способ фототравления, по мнению автора, невыгоден для массового производства печатных схем ввиду его относительной дороговизны и медленности, но высокая точность и простота этого метода делают его удобным для лабораторной практики. Способ заключается в следующем.

На бумаге чертится изображение схемы, обычно в увеличенном виде, с которого изготовляется контрастный негатив. Изоляционная пластина с наклеенной медной фольгой покрывается светочувствительным лаком, экспонируется, проявляется и травится в растворе хлористого железа, причем незащищенная рисунком часть медного слоя вытравляется. Негативы обычно изготовляются на ацетатной или нитропленке, для более точной работы употребляется виниловая пленка, наивысшую точность дают стеклянные негативы.

Вместо изготовления негатива фотографическим путем возможно также нанесение рисунка схемы на виниловую пленку, покрытую слоем непрозрачного в фотографическом смысле лака, и гравировка рисунка путем процарапывания или прорезания линий схемы.

Полив платы светочувствительным лаком производится два раза; после второго полива плата сушится в темной центрифуге подогревом до 50° С (120°F). Время экспозиции колеблется от 2 до 3 мин. при использовании вольтовой дуги с силой тока 20—40 *а* на расстоянии от негатива в 90 *см*.

Проявитель растворяет лак, не подвергшийся действию света, раскрывая лежащую под лаком медь. В качестве проявителя употребляется метиловый спирт, слегка подкрашенный голубой краской, которая помогает обнаружить дефекты изображения. Обработка проявителем продолжается 2 мин., после чего плата промывается в сильной струе воды и сушится с помощью инфракрасных лучей. Сушка может быть ускорена с помощью обдува. После сушки изображение тщательно исследуется, лишние остатки лака могут быть удалены гравировальным резцом или бритвенным лезвием.

После этого производится травление при помощи раствора хлористого железа с целью удалить химическим путем медь, не защищенную лаком. Травление можно производить в ванне, в которую поверх пластины наливается раствор хлористого железа, покрывающий пластину на 50—75 *мм*. Перед погружением плата слегка протирается куском ваты, смоченной травящим раствором, чтобы удалить следы жира, которые могут быть на ее поверхности. Продолжительность травления около 15 мин. на 0,025 *мм* толщины слоя меди. Оставшиеся нерастворенными вследствие попадания пузырьков воздуха или пятен масла участки травятся дополнительно при помощи протирания небольшим куском ваты. Травление можно ускорить примерно вдвое с помощью продувания воздуха, который усиливает циркуляцию растворителя. Плата помещается в ванну горизонтально, на расстоянии 12 *мм* ото дна, светочувствительным слоем вниз, а воздух продувается через перфорированную пластину, помещенную на дне сосуда. Можно также помещать плату вертикально с небольшим наклоном и обмывать ее раствором хлористого железа, который подается из пульверизатора.

Плотность раствора, употребляемого в вышеупомянутых способах, 42° Боме. Растворяющая способность 60 *г* меди на 1 *л* раствора.

После травления плата очищается от травящего раствора и сушится. Для облегчения пайки ее покрывают тонким слоем серебра, погружая на несколько секунд в раствор цианистого серебра.

*Л. В. Кутуков*

**5338. Печатные схемы** (Printed circuits), TV and Radio Engng, 1953, **23**, № 3, 18, 35 (англ.)

Информационное сообщение о технологических нововведениях, применяемых некоторыми фирмами при производстве печатной аппаратуры и деталей. Упоминаются: 1) Фирма «Серкуитрон» (Circuitron, Inc.) (РЖМат, 1954, 2437, 3149). 2) Фирма RCA, которая изготовляет фотохимическим способом (см. реф. 5337) трансформаторы промежуточной частоты на резонансную частоту в 40 *Мгц*, катушки и отсасывающие фильтры. С одного негатива, содержащего изображение многих деталей, изготовляется большое количество копий одновременно. Фотоэмульсия наносится на медную фольгу, приклеенную к пластмассе, и сушится с помощью инфракрасных лучей. С негатива изображение схемы печатается на фотоэмульсии. Затем медь вытравливается в ванне, за исключением участков, покрытых засвеченной эмульсией, соответствующих схемным соединениям. По этому способу можно изготавливать рисунок схемы при ширине линий до 0,025 *мм*. 3) Фирма «Сильвания» (Sylvania Electric Products, Inc.) производит гибкие схемы, применение которых позволяет употреблять детали с большими допусками по их геометрическим размерам. Изготовление схем происходит следующим образом: на лист из нержавеющей стали по трафарету наносится слой лака, затем наносится слой меди. Медь и лак отделяются от стального листа с помощью липкой ленты. 4) Фирма «Вакьюмет» (Vacumet, Inc.) изготовляет герметизированные сопротивления и *RC*-цепи. Схема и детали наносятся на стеатите, стекле или других диэлектриках, покрываются двумя слоями органической смолы с наполнителем, а затем прочным, непроницаемым для атмосферных воздействий покрытием. Точность герметизированных подобным образом сопротивлений при хранении выше 1%. При работе под нагрузкой точность, уровень шумов, температурные характеристики улучшаются на 15—25%. Температурные характеристики конденсаторов с высокой добротностью также улучшаются. Этот способ герметизации особенно рекомендуется для капсулирования полупроводниковых триодов.

*Л. В. Кутуков*

**5339. Печатные схемы фирмы «Боинг». Петит** (Boeing electrical circuits made by etching process. Petite Irving), Radio and Telev. News, 1953, **50**, № 5, 140 (англ.)

Краткое сообщение о фотохимическом способе изготовления печатных схем. Негативы изготовляются на винилитовой пленке. Толщина медной фольги 0,075 *мм*. Плотный контакт с негативом обеспечивается печатанием в вакуумной копировальной раме; освещение дугой с силой тока 95*а*.

Травление производится при помощи хлористого железа. См. реф. 5337. *Л. В. Кутуков*

**5340. Изготовление контуров радио и телевизионных приемников способом печатания** (Radio-TV coils made by printing), Radio Age, 1953, **12**, № 3, 8, 9 (англ.)

Сообщение фирмы RCA о производстве печатных схем. Приведены фотографии некоторых моментов технологического процесса.

См. реф. 5338. *Л. В. Кутуков*

**5341. Детали печатных схем** (Printed circuit components), Tele-Tech, 1953, **12**, № 6, 360 (англ.)

См. реф. 5338, 5340.

**5342. Преобразователь непрерывных величин в цифровые** (Analog to digital converter), Rev. Scient. Instrum., 1953, **24**, № 5, 405 (англ.)

Сообщение фирмы «Телекомпьютинг» (Telecomputing Corp.) о выпуске прибора «Теледьюсер 24А» (Teleducer 24A), предназначенного для представления в цифровой форме величины напряжения, снимаемого с выхода термопары, тензометра или другого устройства.

Диапазон измеряемых напряжений 0,02—1 *в*. Измеряемое напряжение представляется трехразрядным десятичным числом с точностью до 0,1% по всему диапазону.

Измерение производится с помощью автобалансирующегося трехразрядного цифрового потенциометра с максимальным временем установления 0,8 сек. Показания потенциометра считываются непосредственно с индикатора прибора и одновременно могут быть отпечатаны с помощью подключенного печатающегося устройства, пробиты на перфокартах или перфоленте или записаны на магнитной ленте. *И. В. Защук, Н. Я. Матюхин*

**5343. Преобразователь непрерывных величин в цифровые** (Analog-digital converter), Nucleonics, 1953, **11**, № 5, 79 (англ.)

См. реф. 5342.

**5344. Преобразователь непрерывных величин в цифровые** (Voltage converted to decimal digits), Prod. Engng, 1953, **24**, № 8, 220 (англ.)

См. реф. 5342.

**5345. Потенциометр преобразует напряжения в десятичные цифровые величины** (Potentiometer converts analog voltages into decimal digits), Petrol. Process, 1953, **8**, № 5, 774 (англ.)

См. реф. 5342.

**5346. «Теледьюсер» автоматически записывает напряжение в цифровом виде с точностью до 0,1%** (The teleducer automatically records voltage in decimal digits with 0,1% accuracy), Electronics, 1953, **26**, № 7, 33 (англ.)

См. реф. 5342.

**5347. «Теледьюсер» преобразует низкое напряжение в цифровые величины** (Teleducer digitizes low voltage), Electronics, 1953, **26**, № 7, 321 (англ.)

См. реф. 5342.

**5348. Динамический двоичный счетчик, дающий выход в виде непрерывно меняющейся величины. Паккер** (Dynamic binary counter with analog read-out. Packer Leroy), Conven. Rec. Inst. Radio Engrs, 1953, ч. 7, 13—19 (англ.)

Дается подробное описание и приводятся блок-схемы и принципиальные схемы динамического двоичного счетчика и его отдельных узлов. В счетчике используется динамический триггер, состоящий из линии задержки и клапанных схем для регенерации. Одно из состояний триггера соответствует наличию в схеме регенерируемого импульса, второе — его отсутствию (РЖМат, 1954, 2748). Этот счетчик используется в многоканальной системе периодического измерения времени. Для нескольких величин определяются моменты, соответствующие достижению ими определенной величины. Результаты измерений выдаются в виде непрерывно меняющейся величины (амплитуда напряжения частоты 400 *гц*). Время переноса для 12-разрядного динамического счетчика порядка 0,3 *мксек*. Подобные устройства могут использоваться в качестве сдвигающих регистров и параллельных сумматоров цифровых вычислительных машин. *А. Б. Залкинд*

**5349. Преобразователь непрерывных данных в дискретные** (Analog-digital converter), Nucleonics, 1953, **11**, № 6, 98 (англ.)

Сообщение фирмы «Консолидейтид» (Consolidated Engineering Corp.) о преобразователе 34-104. Преобразователь работает совместно с аналитическим масс-спектрометром и записывает числовую величину высоты выбросов для 40 заранее выбранных массовых чисел. Полученные значения указываются лампочками в виде десятичных чисел и перфорируются на картах или печатаются. Точность измерения 0,1% от максимального значения.

*А. Б. Залкинд*

**5350. Изготовление счетно-аналитических машин «Паурс-Сеймас»** (Making Powers-Samas punched card accounting machines), Machinery (London), 1953, **82**, № 2100, 279—287, 319 (англ.)

Фирма «Паурс-Сеймас» изготовляет счетно-аналитические машины, работающие на картах емкостью в 21, 40 или 65 колонок. Комплект машин состоит из двухпериодных перфораторов, контрольника, сортировки, табулятора и др.; контроль пробивок производится после повторной пробивки перфокарт со смещением пробивок, в результате чего они делаются овальными. Специальная машина-контрольник производит проверку овальности отверстий и при обнаружении карты с круглой пробивкой выбрасывает ее как бракованную. Контроль производится со скоростью 200 карт в 1 мин. Сортировка работает со скоростью 600 карт в 1 мин., табулятор со скоростью 80—120 карт в 1 мин.

В статье приведено подробное описание технологического процесса изготовления деталей двухпериодного перфоратора: матрицы, направляющих и пуансонов для пробивки круглых отверстий в перфокарте.

В описании технологического процесса изготовления матрицы перфоратора дан рисунок и описание работы многошпиндельной сверлильной головки, которой пользуется фирма для сверления и развертки отверстий матрицы и направляющих; контроль изделия производится специальными калибрами, обе-

спечивающими точность по шагу $\pm 0{,}025$ *мм* и по диаметру $\setminus$-0,02 *мм*.

Во второй части статьи дается описание технологии изготовления пуансонов. Время изготовления одного пуансона на автомате 20,4 сек. Даются сведения по режимам термической обработки пуансонов и шлифования их с соблюдением жестких допусков как по диаметру, так и по линейным размерам. Для контроля размеров пуансонов фирма применяет специальный автомат, производящий обмер деталей и сортировку их на три группы, отличающиеся по диаметру на 0,0076 *мм* для допуска 0,02.

В конце статьи даются некоторые сведения по подбору и подгонке пуансонов при установке их в направляющие и матрицы. *В. Н. Рязанкин*

**5351. Изготовление счетно-аналитических машин «Паурс-Сеймас»** (Making Powers-Samas punched card accounting machines), Machinery (London), 1953, **82**, № 2108, 655—662 (англ.)

Дается весьма подробное описание технологического процесса изготовления жестких стержней соединительных (трансляторных) коробок. Дано описание простейших приспособлений, применяемых при изготовлении стержней плоского и круглого профиля, сорта материала, применяемого для стержней, и их обработка. Далее дается описание технологического процесса изготовления проволочных спиральных пружин, работающих на растяжение и сжатие, а также изготовления оболочки боуденовских тросов.

Приводится 15 фотографий отдельных операций технологического процесса изготовления деталей.

См. также реф. 5350. *В. Н. Рязанкин*

**5352. Применение пластмасс в машинах фирмы «Интернейшнл Бизнес Машинс».** Р е й н о л д с (Plastics applications in International Busines Machines. R e y n o l d s F. W.), Soc. Plast. Engrs J., 1953, **9**, № 5, 23—27 (англ.)

В электронных и электромеханических счетно-аналитических машинах фирмы IBM широко применяются детали, изготовленные из различных пластмасс. Дается краткое описание рецептуры изготовления кулачков для токопрерывателей, колодок щеточных блоков, изоляционных деталей реле, бабины обмоток электромагнитов и др. При этом автор останавливается на вопросах соблюдения допусков прессованных деталей, их термоустойчивости и устойчивости против образования трещин в материале.

В заключение отмечается, что для получения качественных пластмассовых деталей необходимо считаться со следующими основными условиями: 1) правильная конструкция детали, 2) правильно выбранный материал, 3) соответствующий режим прессования, 4) хорошо изготовленная прессформа. *В. Н. Рязанкин*

**5353. Вычислительные машины** (Calculating machines), Mass Production, 1953, **29**, № 3, 50—59 (англ.)

Дается описание системы контроля продукции на заводе счетных машин «Берроус» в г. Стратлевен.

Дается описание организации производства счетных машин и движения технической документации при небольших конструктивных изменениях в машине, вводимых в производстве, с перечислением отделов, через которые проходит новая техническая документация, начиная от распоряжения об изменении конструкции и кончая изготовлением специального инструмента и изготовлением новых деталей машины.

В заключительной части статьи дается краткое описание организации сборки счетных машин на этом заводе. *В. Н. Рязанкин*

**5354. Арифмометр с цифрами Брайля для слепых** (Calculator with Braille symbols aids blind), Popul. Mech. Mag., 1953, **100**, № 4, 135 (англ.)

Арифмометр, рассчитанный на выполнение обычных для машин такого класса арифметических действий, который дает возможность слепому оператору без чьей-либо помощи вводить в него цифровые данные и считывать результаты вычислений. Колесики во всех трех счетчиках арифмометра снабжены цифрами Брайля и могут ощупываться кончиками пальцев. Благодаря этому оператор может следить за результатами вычислений на любом их этапе. Конечные результаты затем могут быть записаны при помощи пишущей машинки для слепых, установленной рядом с арифмометром. *А. И. Черный*

**5355. Карманный счетчик для вычислений, связанных с реактивным сопротивлением и резонансом. Тайлер** (Pocket reactance and resonance calculator. T y l e r V. J.), Wireless World, 1953, **59**, № 12, 560—562 (англ.)

Вычислительное устройство для расчетов по формулам, связывающим емкость $C$, индуктивность $L$, частоту $f$, емкостное сопротивление $X_C$, индуктивное сопротивление $X_L$ (как при резонансе, когда $X_C = X_L = X$, так и в иных условиях). Для случая резонанса $X = 1/2\pi fC = 2\pi fL$ или при определенном выборе единиц (герцы, микрофарады, генри, омы или мегагерцы, пикофарады, микрогенри, омы) $X = 159\,020 / fC = 6{,}283\, fL$. Вычислительное устройство представляет собой номограмму с подвижными частями, состоящую из 6 концентрических независимо вращающихся дисков, наибольший из которых имеет наружный диаметр 120 *мм*. Диски изготовляются из прозрачного материала, на них имеются круговые логарифмические шкалы и бинарные поля. Дано подробное описание конструкции и способа употребления номограммы, имеются чертежи. *В. М. Брадис*

**5356. Повышенная точность при вычислениях на счетной линейке. Демен** (Höhere Genauigkeit beim Rechenschieberrechnen. D a e m e n W.), Techn. Rundschau, 1953, **45**, № 52, 19—23 (нем.)

Приводятся некоторые общие соображения о тех направлениях, в каких, по мнению автора, должны развиваться счетные линейки, чтобы обеспечить все возрастающие требования к точности результатов. Отдается предпочтение счетному диску, т. е. счетной линейке с круговыми шкалами. Подробно рассмотрены некоторые простые приемы, позволяющие повысить точность результатов, получаемых при вычислении выражений вида $a \cdot b$, $a / b$, $a \cdot b / c$ в случаях, когда данные содержат не более трех значащих цифр. Так, например, при умножении трехзначного числа на однозначное после получения первых трех цифр произведения на линейке четвертую его цифру, если она есть, можно получить посредством умножения в уме двух однозначных чисел. Умножение трехзначного числа на двузначное

или трехзначное рекомендуется выполнять по частям (на основе распределительного закона). Для вычисления произведения 728·843 = 613 704 рекомендуется записать произведения 728 на отдельные цифры множителя

800 × . . . 8 = . . . ¦400
40 × 728 = 29 ¦120
3 × 728 = 2 ¦184.

Суммируя цифры справа от черты, находим 704, первые же три цифры произведения, а именно 613, получаются непосредственно на линейке. На линейке же при той же установке движка получаются и произведения 2912 и 2184.

Аналогичным образом выполняется и деление: делимое представляется в виде суммы, первое слагаемое которой есть произведение делителя на первую цифру частного. В статье применяется удобная схематическая запись операций, выполняемых на счетной линейке и сводящихся к вычислению ряда значений, прямо пропорциональных данным.

Автор утверждает, что при использовании указанной им конструкции счетного диска применение разобранных им правил позволяет получать результаты с 5 и даже 6 точными цифрами.

Примечание референта. Повышенная точность получается ценой значительного усложнения работы, а потому практическая ценность предложений статьи сомнительна. *В. М. Брадис*

**5357. Вычисление цифра за цифрой или простое объяснение того, что такое цифровые электронные вычислительные машины.** Самюэл (Computing bit by bit or digital computers made easy. Samuel Arthur L.), Proc. Inst. Radio Engrs, 1953, **41**, № 10, 1223—1230 (англ.)

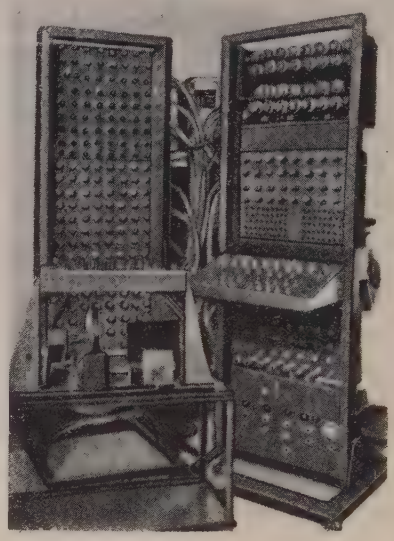
Популярная статья о цифровых электронных вычислительных машинах.

**5358. Большие вычислительные машины, знающие только две цифры: единицу и нуль.** Кервран (Les grandes machines à calculer ne connaissent que deux chiffres: un et zéro. Kervran L.), Sci. et vie, 1953, **84**, № 434, 450—456 (франц.)

Популярная статья, содержащая самое общее качественное описание быстродействующих вычислительных машин. В отдельных дополнительных заметках даются краткие сведения о двоичной системе счисления, двоичном коде для десятичных чисел, о триггерной ячейке, о десятичном кольцевом счетчике из триггерных ячеек, о последовательной системе передачи кодов и о запоминающих устройствах на неоновых лампах на линиях задержки. Даны изображения некоторых машин, в том числе французской опытной машины, изготовляемой для Института Паскаля (см. фото). *К. С.*

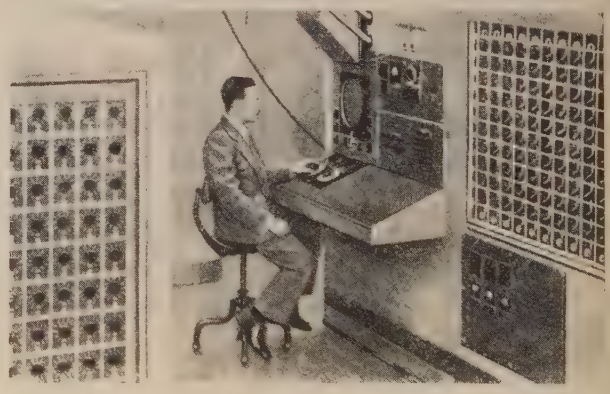
**5359. Не возвещает ли почтовая сортировальная машина в Антверпене наступление эры робота?** Бужю (La trieuse postale d'Anvers annonce-t-elle l'ère du robot? Bouju André), Sci. et vie, 1953, **84**, № 429, 489—497 (франц.)

Популярная статья, в которой описываются в общих чертах: релейная сортировальная машина фирмы «Белл» Антверпенской почты; автоматическое устройство для контроля качества укупорки бутылок, которое подсчитывает процент брака и в случае превышения нормы останавливает укупорочную машину; автоматическое контрольное устройство «селектрол» для проверки веса расфасованных продуктов; электронное читающее устройство фирмы RCA



К реф. 5358

для слепых; электронные вычислительные машины, в частности автомат для психологических исследований (см. фото) (РЖмат, 1954, 3105) и элек-



К реф. 5259

тронный вычислительный перфоратор ИБМ. Автор допускает ненаучные высказывания в духе кибернетики. *А. М.*

**5360. Кибернетика.** Черри (Cybernetics. Cherry E. Colin), Nature, 1953, **172**, № 4380, 648—649 (англ.)

Отчет о трех докладах по кибернетике, прочитанных на собрании Британской ассоциации в Ливерпуле: Черри (E. Collin Cherry), Организмы и механизмы — вводный обзор; Хик (W. E. Hick), Воздействие теории информации на психологию; Маккей (D. M. MacKay), Сравнение мозга с машинами.

**5361 РЕП. Живой мозг.** Уолтер (The living brain. Walter W. Grey, 216 pp., 23 figs, Gerald Duckworth and Co., Ltd., L., 1953, 15 s.) [Рецензия: Диккинсон (Dickinson C. J.), Electronic Engng, 1953, 25, № 310, 530—531 (англ.)]

**5362 П. Прибор для вычисления среднего.** Барретт (Average computer. Barrett Claudius S.) [Western Electric Co., Inc., Нью-Йорк, США]. Пат. США 2642223, кл. 235—61, 16.06.53

**5363 П. Механизм последовательной цифровой пробивки.** Дафф (Consecutive numeral punching mechanism. Duff Alexander G.) [Remington Rand Inc., Нью-Йорк, США]. Пат. США 2640538, кл. 164—111, 2.06.53

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

**5364. Подсчет распределения распыленных частиц по заданным размерам.** Уилер, Трикетт (Measurement of the size-distribution of spray particles. Wheeler L. K., Trickett E. S.), Electronic Engng, 1953, 25, № 308, 402—406 (англ.)

Научно-исследовательской станцией связи (Post Office Engineering Research Station ) в США разработана аппаратура для быстрого подсчета распределения распыленных частиц по заданным размерам. Подобные подсчеты необходимы в биологии, агрохимии, физике горения и др. На обработку образца, содержащего 1800 точек, сотрудник затрачивал 8 час.; аппаратура выполняет эту работу за время от 2-х до 25 мин.

Аппаратура состоит из стандартного фототелеграфного трансмиттера, на барабане которого укрепляется образец с распыленными частицами, преобразователя модуляции импульса по ширине (пропорционально размеру частицы) в амплитудно-импульсную модуляцию, группы амплитудных дискриминаторов и счетчиков, соответствующих каждому дискриминатору. Каждый счетчик считает число частиц определенного размера в образце. Размер образца с распыленными частицами 254 × 280 *мм*. Барабан имеет 2 скорости вращения: 1 об/сек и 2 об/сек. Шаг подачи образца по образующей барабана 0,17 и 0,85 *мм*. Линейная скорость на поверхности барабана 56 *см/сек*. Приводится фото всей установки, подробное описание блок-схемы устройства, а также принципиальные схемы отдельных узлов. В качестве счетчиков частиц используются специальные лампы типа «декатрон» (см. Bacon R. C., Pollard J. R., Electronic Engng, 1950, 22, 173).

Полученное расхождение в кривых, снятых человеком и описываемым устройством, не более 10% и может быть сведено до 3%. Указывается, что подобная аппаратура может подсчитывать количество частиц с размерами, меньшими 0,5 *мм*. Это достигается фотографированием с последующим увеличением фотообразца. *А. Б. Залкинд*

**5365. Телеметрия управляемого оружия** (Guided-weapons telemetering), Flight, 1953, 64, № 2335, 556—558 (англ.)

Сообщение о разработанных Министерством снабжения (Англия) средствах, обеспечивающих связь управляемых ракетных снарядов с землей для информации о работе узлов снаряда. Описаны две разработанные системы: низкочастотная временная система многократной связи для передачи данных о медленно протекающих процессах (температура, давление) и высокочастотная система, использующая фазовоимпульсную модуляцию для передачи быстропротекающих процессов (работа бортовой радиоаппаратуры управления).

Дается описание принципов работы и приводятся основные характеристики каждой из этих систем. Приведены фотографии отдельных блоков наземной и бортовой аппаратуры. *В. П. Парамонов*

**5366. Электронное устройство управляет производством** (Production is controlled by electronic system), Purdue Engr, 1953, 49, № 3, 24, 13 (англ.)

Краткая заметка об управлении автоматическими линиями. Отмечается, что обычные способы управления при помощи электрических цепей, размыкаемых и замыкаемых выключателями, пригодны лишь тогда, когда ведется обработка изделия лишь одного определенного типа. Если требуется обрабатывать изделия нескольких различных типов, требуется более гибкая система, которая может быть осуществлена программным управлением. Программа может быть записана на перфоленте и подана в управляющее устройство типа цифровой вычислительной машины. *Д. П.*

**5367 П. Счетный прибор для вычисления зарплаты.** Хиггинс, Янг (Time and wage calculator. Higgins Fred H., Young Waldemar V.). Пат. США 2634054, кл. 235—70, 7.04.53

Счетная линейка специального вида, упрощающая подсчет зарплаты в зависимости от времени начала и конца работы и разряда. *В. М. Брадис*

---

**См. также:** 5052, 5054, 5257

# АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ


**А**

Абрамов А. А. 5251
Агарвал 5165
Адамар 5223
Александров 5091
Алексевич 5175
Альтман 5179
Англес д'Орьяк 5166
Андерс 5135
Анджелич 5248 **РЕЦ**
Андреев Н. Н. 5219
Андрейков П. 5269
Ап-Саймон 5254
Апте 5109
Аргириаде 5236
Атанасян Л. С. 5239, 5240
Аткин 5048

**Б**

Багчи 5161
Баджемил 5115
Бак 5112
Барнер 5237
Барретт 5362 **П**
Бассон 5032 **К**
Беккер 5035 **РЕЦ**
Беликов Е. Ф. 5282 **К**
Берджер 5067
Беренд 5210
Берже 5250
Бёйрлинг 5105
Бирнбаум 5191
Бланд 5132
Блануша 5248 **РЕЦ**
Блейкерс 5088, 5089
Бонферрони 5094
Борель 5082, 5083
Борсук К. 5077, 5078
Бредихин Б. М. 5041
Брэйнс 5018
Брумхалл 5337
Бужю 5359
Бузин Е. И. 5218
Букович 5260, 5261
Булиган 5034 **РЕЦ**
Бухгольц 5162 **К**
Бхатнагар 5164
Былов Б. Ф. 5123 **Д**

**В**

Вазов 5272
Ван Хао 5033 **РЕЦ**
Вебер-Клейв 5275
Вейси 5131
Векуа Н. П. 5108
Вернотт 5160 **К**
Верхуфф 5072
Взорова А. И. 5266
Витушкин А. Г. 5098
Ворович И. И. 5119
Вуджер 5038 **РЕЦ**
Вулих Б. З. 5171

**Г**

Гаддум 5283 **РЕЦ**
Гал 5178
Гамбье 5212
Гахов Ф. Д. 5107
Герхолд 5334
Гёц 5099
Гийотен 5214
Главатый 5246
Гнеденко Б. В. 5026 **РЕЦ**
Годо 5235
Гоин 5270
Гомбаш 5271
Гомес 5080
Гонзет 5233 **РЕЦ**
Гопп Ю. А. 5128
Грей 5294
Гринстейн 5063
Гуггенбул 5211
Гудстейн 5036 **РЕЦ**
Гурский 5125

**Д**

Давенпорт 5059 **РЕЦ**
Данкан 5167
Данкан 5129
Дарбо 5147
Дафф 5363 **П**
Де-Толленаре 5233 **РЕЦ**
Дезарг 5216 **РЕЦ**
Дейвис 5126
Делоне Б. Н. 5230
Демен 5356
Джастис 5215 **К**
Джованарди 5229
Джозеф 5197 **К**
Ди-Торо 5144
Диккинсон 5361 **РЕЦ**
Дирак 5081
Дуб 5189 **РЕЦ**
Дубурдьё 5199 **РЕЦ**
Дюбрей 5064

**Е**

Е Гай-юань 5286

**Ж**

Жармен 5169

**З**

Загубиженко П. А. 5127
Занден 5231 **К**
Зейдель 5115
Зирк 5154 **РЕЦ**

**И**

Иванова А. И. 5268
Измайлов В. Д. 5241
Исхак 5111

**Й**

Йейтс 5283 **РЕЦ**
Йокобори 5202

**К**

Кадец М. И. 5172
Кадуэлл 5193
Калаби 5243
Камке 5247 **РЕЦ**
Камынин Л. И. 5258
Канольд 5051
Капланский 5176
Карберри 5335
Карлиц 5046, 5047
Карст 5220
Катнер 5148
Каулинг 5138 **РЕЦ**
Кейхилл 5126
Кервран 5358
Кин 5285
Киникуния 5152 **К**
Кнезер 5093 **РЕЦ**
Кнопп 5151 **К**
Кованько А. С. 5102
Кокс 5192
Колмогоров 5013
Коломбо 5168
Колчин Н. И. 5221
Кон 5061
Копсон 5136
Королюк В. С. 5190
Корпут 5306
Коста-Альяга 5056
Костовский А. Н. 5022
Костюков А. А. 5143
Коулсон 5280 **К**
Коэн 5045
Крайчик 5059 **РЕЦ**
Крейг 5307
Крейс 5149
Крейсел 5033 **РЕЦ**
Криккеберг 5095
Крикунов Ю. М. 5145 **Д**
Крылов В. И. 5267
Кудрявцев Л. Д. 5100
Кулидж 5216 **РЕЦ**
Куратовский К. 5079, 5092 **РЕЦ**
Курош А. Г. 5060 **К**

**Л**

Ланцош 5262
Лауффер 5207, 5226, 5227
Литман 5154 **РЕЦ**
Лоран 5213
Лоткин 5264, 5265
Лукасевич 5038 **РЕЦ**
Льюбин 5209
Люнцман 5278

**М**

Маджумдар 5195
Майоров И. В. 5281 **Д**
Макдоналд 5293
Мак-Миллен 5198 **РЕЦ**
Мартиросян Р. М. 5139 **Д**
Масс 5117
Масси 5088, 5089
Мейнардус 5040
Мельник С. И. 5256

Менгер 5030
Микеладзе Ш. Е. 5259
Микула 5228
Микусинский 5065
Митрович 5104
Моссаковский В. И. 5127
Моцкин 5066
Мукхерджи 5161
Мур 5289
Мур 5087
Мюллер 5170

Н

Натуччи 5019
Нёйман 5068
Ниче 5232 **РЕЦ**
Номидзу 5249
Ньюман 5206 **РЕЦ**
Ньютон 5157

О

О'Коннор 5032 **К**
Оппенгейм 5043
Орлич 5173
Орличек 5276
Орфорд 5304
Освальд 5287
Осима 5074

П

Паккер 5348
Папова Н. В. 5106
Парасюк О. С. 5245
Пароди 5163
Парри 5035 **РЕЦ**
Партхасаратхи 5113
Переманс 5037 **РЕЦ**
Петит 5339
Пёш 5309
Попова 5106
Прайс 5198 **РЕЦ**
Пракаш 5133
Прахар 5016 **РЕЦ**
Прекопа 5183
Про 5205
Пясецкий С. А. 5238

Р

Раджагопал 5156, 5158
Радон 5092 **РЕЦ**
Райт 5031 **К**, 5036 **РЕЦ**
Ралевич 5217
Редеи 5020
Редхеффер 5124
Рейк 5201
Рейник 5225
Рейнолдс 5352
Ремидж 5264,5265
Реноди 5244
Реньи 5097
Ригер 5039
Рид 5187
Рид 5155 **РЕЦ**
Ринд 5300
Роббинс 5182
Робинсон 5037 **РЕЦ**
Роджерс 5044
Роз 5029
Роте 5181
Рыжков В. В. 5242

С

Салковер 5215 **К**
Самюэл 5357
Сатхе 5042
Саутуэлл 5131
Сейбл 5067
Сейдж 5324
Селфридж 5052
Серр 5086
Сигалов А. Г. 5146
Сингх 5050
Смейл 5155 **РЕЦ**
Смирнов В.И. 5153 **К**
Смит 5212 **К**
Смит 5200
Собел 5194
Спенс 5290
Стайгант 5189 **РЕЦ**
Страус 5174
Стэнли 5028
Субба-Рао 5053
Суиггетт 5335
Суиннертон-Дайер 5048
Сухаревский И. В. 5140Д

Т

Тайлер 5355
Там Цой-так 5120
Тамура 5070
Тауски 5066
Типпетт 5206 **РЕЦ**
Титчмарш Е. К. 5058 **К**
Този 5208
Томас 5273
Томонага 5252, 5253
Торнхейм 5075
Трантер 5142
Триккетт 5364
Трусделл 5222
Трухлов А. М. 5130
Тузери 5288
Тшицинский 5101 **К**

У

Уилер 5364
Уитл 5186
Уитлок 5055
Улер 5054
Умедзава 5110
Уокер 5197 **К**
Уолтер 5361 **РЕЦ**
Уре 5059 **РЕЦ**
Уэйнберг 5284

Ф

Фаст 5099
Фейтис 5057
Ферт 5138 **РЕЦ**
Фишер 5283 **РЕЦ**
Флойд 5076
Фогель 5121
Форт 5076
Фрайер 5196 **К**
Франк 5024
Франкс 5184
Фрейзер 5169
Фрёйд 5159
Фридман М. А. 5071 Д
Фринк 5037 **РЕЦ**
Фромме 5309
Фултон 5224
Фюрне 5021

Х

Хадвигер 5255
Халанай 5122
Хаузер 5247 **РЕЦ**
Хаусхолдер 5263
Хенриксен 5073
Хермес-Шольц 5034 **РЕЦ**
Хёнль 5134
Хиггинс 5367 **П**
Хирцебрух 5090
Хорват 5177

Ц

Цакер 5069
Целлер 5180
Циммер 5134
Цудзи 5103, 5114

Ч

Чапман 5138 **РЕЦ**
Черри 5360
Чжан Су-чэн 5084, 5085
Чжан Ши-сюнь 5141
Чибрикова Л. И. 5107

Ш

Шарма 5062
Шах 5111
Шейнин 5203
Шеннон 5289
Шкрашек 5025
Шоломити 5049
Штейнхаус Г. 5079, 5204
Штыкан А. Б. 5274
Шуберт 5234 **РЕЦ**
Шульгин М. Ф. 5118
Шура-Бура М. Р. 5257

Э

Эйгенсон Л. С. 5137
Эрве 5116
Эрдёш 5115, 5174
Эрим 5096
Эро 5185

Ю

Юстиниянович 5232 **РЕЦ**
Ютинг 5027
Юшкевич А. П. 5026 **РЕЦ**

Я

Яворовский 5077
Якобсталь 5150
Янг 5367 **П**

---

A

Agarwal R. P. 5165
Alekszandrov P. Sz. 5091
Alexiewicz A. 5175
Altman M. 5179
Anders T. 5135
Anđelić T. P. 5248 **РЕЦ**
Anglès d'Auriac H. 5166
Ap Simon H. G. 5254
Apté A. 5109
Arghiriade E. 5236
Atkin A. O. L. 5048

B

Bagchi H. D. 5161
Bagemihl F. 5115
Barner M. 5237
Barrett C. S. 5362 **П**
Basson A. 5032 **К**
Becker O. 5035 **РЕЦ**
Behrend F. A. 5210
Berger M. 5250
Berger W. J. 5067
Beurling A. 5105
Bhatnagar K. P. 5164
Birnbaum Z. W. 5191
Blakers A. L. 5088, 5089
Bland D. R. 5132
Blanuša D. 5248 **РЕЦ**
Bonferroni C. 5094
Borel A. 5082, 5083
Borsuk K. 5077
Bouju A. 5359
Bouligand G. 5034 **РЕЦ**
Broomhall G. E. 5337
Bruins E. M. 5018
Buchholz H. 5162 **К**
Buck R. 5112
Bukovics E. 5260, 5261

C

Cadwell J. H. 5193
Cahill W. F. 5126
Calabi E. 5243
Carberry J. F. 5335
Carlitz L. 5046, 5047
Chapman S. 5138 **РЕЦ**
Cherry E. C. 5360
Cohen E. 5045
Cohn R. M. 5061
Colombo S. 5168
Coolidge J. 5216 **РЕЦ**
Copson E. T. 5136

Corput J. G. van der 5306
Costa Aliaga C. A. 5056
Coulson C. A. 5280 К
Cowling T. G. 5138 РЕЦ
Cox D. R. 5192
Craig L. J. 5307

D

Daemen W. 5356
Darbo G. 5147
Davenport H. 5059 РЕЦ
Davis Ph. 5126
De Tollenaere 5233 РЕЦ
Desargues G. 5216 РЕЦ
Di Toro M. J. 5144
Dickinsen C. J. 5361 РЕЦ
Dirac G. A. 5081
Doob J. L. 5189 РЕЦ
Doubourdieu J. 5199 РЕЦ
Dubreil P. 5064
Duff A. G. 5363 П
Duncan D. B. 5167
Duncan W. J. 5129

E

Erdös P. 5115, 5174
Erim 5096
Eyraud H. 5185

F

Fast H. 5099
Feytis J. 5057
Fisher R. A. 5283 РЕЦ
Floyd E. E. 5076
Fort M. K. Jr. 5076
Franckx Ed. 5184
Frank L. 5024
Fraser P. A. 5169
Freud G. 5159
Frink O. 5037 РЕЦ
Fromme W. 5309
Fryer H. C. 5196 К
Fulton C. M. 5224
Furnée R. 5021
Furth R. 5138 РЕЦ

G

Gaddum J. H. 5283 РЕЦ
Gál I. S. 5178
Gambier B. 5212
Gerhold R. A. 5334
Giovanardi M. 5229
Godeaux L. 5235
Goheen H. 5270
Gombás P. 5271
Gomes A. P. 5080
Gonseth F. 5233 РЕЦ
Goodstein R.L. 5036 РЕЦ
Górski J. 5125
Götz A. 5099
Gray H. J., Jr. 5294
Grinstein L. S. 5063
Guggenbuhl L. 5211
Guillotin R. 5214

H

Hadamard J. 5223
Hadwiger H. 5255
Halanay A. 5122
Hauser G. 5247 РЕЦ
Henriksen M. 5073
Hermes-Scholz 5034 РЕЦ
Hervé M. 5116
Higgins F. H. 5367 П
Hirzebruch F. 5090
Hlavatý V. 5246
Horváth J. 5177
Householder A. S. 5263
Hönl H. 5134

I

Ishaq M. 5111

J

Jacobsthal E. 5150
Jarmain W. R. 5169
Jaworowski J. W. 5077
Joseph L. 5197 К
Justice H. K. 5215 К
Justinijanović J. 5232 РЕЦ

K

Kamke 5247 РЕЦ
Kanold H.-J. 5051
Kaplansky I. 5176
Karst O. J. 5220
Keen A. W. 5285
Kervran L. 5358
Kinikuniya Y. A. 5152 К
Kneser H. 5093 РЕЦ
Knopp K. 5151 К
Kolmogorow A. 5013
Kraïtchik M. 5059 РЕЦ
Kreis H. 5149
Kreisel G. 5033 РЕЦ
Krickeberg K. 5095
Kuratowski C. 5092 РЕЦ
Kuttner B. 5148

L

Lanczos C. 5262
Lauffer R. 5207, 5226, 5227
Littmann G. 5154 РЕЦ
Lorent H. 5213
Lotkin M. 5264, 5265
Lubin C. I. 5209
Łukasiewicz J. 5038 РЕЦ
Lünzmann K. 5278

M

Maass H. 5117
Macdonald N. 5293
McMillen W. 5198 РЕЦ
Majumdar K. N. 5195
Massey W. S. 5088, 5089
Meinardus G. 5040
Menger K. 5030
Mikula J. 5228
G.-Mikusiński J. 5065
Mitrović D. 5104
Moore E. F. 5289
Moore J. C. 5087
Motzkin T. S. 5066
Mukherji B. N. 5161
Müller R. 5170

N

Natucci A. 5019
Neumann B. H. 5068
Newman D. 5206 РЕЦ
Newton T. A. 5157
Niče V. 5232 РЕЦ
Nomizu K. 5249

O

O'Connor D. J. 5032 К
Oppenheim A. 5043
Ore O. 5059 РЕЦ
Orford R. C. 5304
Orlicek A. F. 5276
Orlicz W. 5173
Osima M. 5074
Oswald J. 5287

P

Packer L. 5348
Parodi M. 5163
Parry W. T. 5035 РЕЦ
Parthasarathy M. 5113
Peremans W. 5037 РЕЦ
Petite I. 5339
Pösch H. 5309
Prachar K. 5016 РЕЦ
Prakash P. 5133
Prékopa A. 5183
Price D. 5198 РЕЦ
Ptro M. 5205

R

Radon J. 5092 РЕЦ
Rainich G. Y. 5225
Rajagopal C. T. 5156, 5158
Raljević Š. 5217
Read C. B. 5155 РЕЦ
Rédei L. 5020
Redheffer R. M. 5124
Reich E. 5201
Reid A. T. 5187
Remage R. 5264 5265
Renaudie J. 5244
Rényi A. 5097
Reynolds F. W. 5352
Rieger G. J. 5039
Rind R. 5300
Robbins H. 5182
Robinson A. 5037 РЕЦ
Rogers C. A. 5044
Rose A. 5029
Rothe E. H. 5181

S

Sage I. M. 5324
Saibel E. 5067
Salkover M. 5215 К
Samuel A. L. 5357
Sanden H. 5231 К
Sathe L. G. 5042
Scholomiti N. C. 5049
Schubert 5234 РЕЦ
Seidel W. 5115
Selfridge J. L. 5052
Serre J. -P. 5086
Shah S. M. 5111
Shainin R. 5203
Shannon C. E. 5289
Sharma A. 5062
Singh D. 5050
Sirk H. 5154 РЕЦ
Smail L. L. 5156 РЕЦ
Smith E. S. 5215 К
Smith W. L. 5200
Sobel M. 5194
Southwell R. V. 5131
Spence H. W. 5290
Stanley R. L. 5028
Steinhaus H. 5204
Stigant S. A. 5189 РЕЦ
Straus E. G. 5174
Subba Rao K. 5053
Swiggett R. L. 5335
Swinnerton-Dyer P. 5048
Škrášek J. 5025

T

Taam Choy-Tak 5120
Tamura T. 5070
Taussky O. 5066
Thomas L. H. 5273
Thouzery J. 5288
Tippett L.H.C. 5206 РЕЦ
Tomonaga Y. 5252, 5253
Tornheim L. 5075
Tosi A. 5208
Tranter C. J. 5142
Trickett E. S. 5364
Trjitzinsky W. J. 5101 К
Truesdell C. 5222
Tsuji M. 5103, 5114
Tyler V. J. 5355

U

Uhler H. S. 5054
Umezawa T. 5110

V

Vaisey G. 5131
Verhoeff J. 5072
Vernotte P. 5160 К
Vogel Th. 5121

W

Walker H. M. 5197 К
Walter W. G. 5361 РЕЦ

Wang Hao 5033 **РЕЦ**
Wasow W. 5272
Weber-Klein P. 5275
Weinberg L. 5284
Wheeler L. K. 5364
Whitlock W. P., Jr. 5055
Whittle P. 5186
Woodger J. H. 5038 **РЕЦ**
Writght G. H. 5031 **К**, 5036 **РЕЦ**

**Y**

Yates F. 5283 **РЕЦ**
Yeh Kai-Yuan 5286
Yokobori T. 5202
Young W. V. 5367 **П**
Yuting Sh. 5027

**Z**

Zacher G. 5069
Zeller K. 5180
Zimmer E. 5134
張世勛 5141
張素誠 5084, 5085

---

Технический редактор *К. И. Игнаткова*